Corrigé de l'examen du 31 mai 2019

Durée: 2 heures

Exercice 1 (Un schéma multi-pas pour les EDO, 6 points)**.**

1. Le schéma est à 3 pas, donc $r = 2$.
2. En identifiant, il vient
$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0,\quad \beta_0 = \frac{23}{12},\ \beta_1 = \frac{-16}{12},\ \beta_2 = \frac{5}{12}.$$
3. On utilise la caractérisation du cours: un schéma est d'ordre au moins p si et seulement si pour tout $k \in [|0, p|]$, on a
$$\sum_{i=0}^{r} \left(i^k \alpha_i - k i^{k-1} \beta_i\right) = (-1)^k.$$
On teste donc les conditions pour $k = 0, 1, 2, \dots$ jusqu'à ce que cela ne fonctionne plus. Pour $k = 0$, on a
$$\sum_{i=0}^{r} \left(i^0 \alpha_i - 0 i^{-1} \beta_i\right) = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i = 1 + 0 + 0 = 1 = (-1)^0.$$
La condition est vérifiée pour $k = 0$. Pour $k = 1$, on a
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{r} \left(i \alpha_i - 1 i^0 \beta_i\right) &= 0\alpha_0 + 1\alpha_1 + 2\alpha_2 - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2\\ &= 0 + 0 + 0 - \frac{23}{12} + \frac{16}{12} - \frac{5}{12}\\ &= \frac{-23 + 16 - 5}{12}\\ &= \frac{-12}{12}\\ &= -1\\ &= (-1)^1.\end{aligned}$$
La condition est vérifiée pour $k = 1$. Pour $k = 2$, on a
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{r} \left(i^2 \alpha_i - 2 i^1 \beta_i\right) &= 0^2\alpha_0 + 1^2\alpha_1 + 2^2\alpha_2 - 2.0.\beta_0 - 2.1.\beta_1 - 2.2.\beta_2\\ &= 0 + 0 + 0 - 0 + \frac{2.16}{12} - \frac{4.5}{12}\\ &= \frac{-32 - 20}{12}\\ &= \frac{12}{12}\\ &= 1\\ &= (-1)^2.\end{aligned}$$

La condition est vérifiée pour $k = 2$. Pour $k = 3$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{r} \left(i^3\alpha_i - 3i^2\beta_i\right) &= 0^3\alpha_0 + 1^3\alpha_1 + 2^3\alpha_2 - 3.0^2.\beta_0 - 3.1^2.\beta_1 - 3.2^2.\beta_2 \\
&= 0 + 0 + 0 - 0 + \frac{3.16}{12} - \frac{12.5}{12} \\
&= \frac{48 - 60}{12} \\
&= \frac{-12}{12} \\
&= -1 \\
&= (-1)^3.
\end{aligned}$$

La condition est vérifiée pour $k = 3$. Pour $k = 4$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{r} \left(i^2\alpha_i - 4i^3\beta_i\right) &= 0^4\alpha_0 + 1^4\alpha_1 + 2^4\alpha_2 - 4.0^3.\beta_0 - 4.1^3.\beta_1 - 4.2^3.\beta_2 \\
&= 0 + 0 + 0 - 0 + \frac{4.16}{12} - \frac{32.5}{12} \\
&= \frac{64 - 160}{12} \\
&= \frac{-96}{12} \\
&= -8 \\
&\neq (-1)^4.
\end{aligned}$$

La condition n'est vérifiée pour $k = 4$. Ainsi, le schéma est d'ordre au moins 3 mais pas d'ordre 4, il est donc d'ordre exactement 3.

4. Le polynôme caractéristique de la méthodes est donné par

$$X^3 - \alpha_0 X^2 - \alpha_1 X - \alpha_2 = X^3 - X^2 = X^2(X - 1).$$

On rappelle qu'un schéma multi-pas est stable si et seulement si les racines du polynôme caractéristiques sont de module inférieur ou égal à 1 et celles de module 1 sont simples. Ici, on a une racine double 0, de module strictement plus petit que 1, et une racine simple qui et 1, de module égal à 1. Le schéma est donc stable.

Le schéma est consistant d'ordre 3 et stable, il converge donc à l'ordre 3.

Exercice 2 (Schéma de Gear pour l'équation de la chaleur, 7 points). 1. La relation du schéma se réécrit sous la forme matricielle

$$\frac{1}{2h}\left(3U_{n+1} - 4U_n + U_{n-1}\right) + \frac{1}{k^2}\Delta_J U_{n+1} = 0,$$

où Δ_J est la matrice du Laplacien discret introduite en cours (2 sur la diagonale, -1 sur les sur et sous-diagonales). On réécrit la relation précédente sous la forme

$$(3I_{J-1} + \frac{2h}{k^2}\Delta_J)U_{n+1} = 4U_n - U_{n-1}.$$

La matrice Δ_J est symétrique définie positive par le cours, donc la matrice $3I_{J-1} + \frac{2h}{k^2}\Delta_J$ est inversible et on peut écrire

$$U_{n+1} = 4(3I_{J-1} + \frac{2h}{k^2}\Delta_J)^{-1}U_n - (3I_{J-1} + \frac{2h}{k^2}\Delta_J)^{-1}U_{n-1}.$$

Ainsi, on a bien $V_{n+1} = BV_n$ avec

$$B = \begin{pmatrix} 4(3I_{J-1} + \frac{2h}{k^2}\Delta_J)^{-1} & -(3I_{J-1} + \frac{2h}{k^2}\Delta_J)^{-1} \\ I_J & 0. \end{pmatrix}$$

2. On effectue des développements limités, mais en "gardant" t_{n+1} pour simplifier. On a

$$u(t_n,x_j) = u(t_{n+1},x_j) - h\frac{\partial u}{\partial t}(t_{n+1},x_j) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_{n+1},x_j) - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_{n+1},x_j) + O(h^4).$$

De même,

$$u(t_{n-1},x_j) = u(t_{n+1},x_j) - 2h\frac{\partial u}{\partial t}(t_{n+1},x_j) + \frac{(2h)^2}{2}h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_{n+1},x_j) - \frac{(2h)^3}{6}h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_{n+1},x_j) + O(h^4).$$

On a donc

$$3u(t_{n+1},x_j) - 4u(t_n,x_j) + u(t_{n-1},x_j) = 2h\frac{\partial u}{\partial t}(t_{n+1},x_j) - \frac{7h^3}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_{n+1},x_j) + O(h^4).$$

En reprenant les calculs déjà fait plusieurs fois en cours et en TD, on a que

$$u(t_{n+1},x_{j+1}) - 2u(t_{n+1},x_j) + u(t_{n+1},x_{j-1}) = k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_{n+1},x_j) + \frac{k^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_{n+1},x_j) + O(k^5).$$

Ainsi, en regroupant tout ceci et en utilisant la relation $\frac{\partial u}{\partial t}(t_n,x_j) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n,x_j)$, on obtient pour l'erreur de troncature

$$\begin{aligned}
e_j^n &= \left|\frac{1}{3}\left(3u(t_{n+1},x_j) - 4u(t_n,x_j) + u(t_{n-1},x_j)\right) - \frac{2h}{k^2}\left(u(t_{n+1},x_{j+1}) - 2u(t_{n+1},x_j) + u(t_{n+1},x_{j-1})\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{3}\left(2h\frac{\partial u}{\partial t}(t_{n+1},x_j) - \frac{7h^3}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_{n+1},x_j) + O(h^4) - 2h\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_{n+1},x_j) - \frac{hk^2}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_{n+1},x_j) + O(hk^3)\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{3}\left(-\frac{7h^3}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_{n+1},x_j) + O(h^4) - \frac{hk^2}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_{n+1},x_j) + O(hk^3)\right)\right| \\
&= O(h^3) + O(hk^2).
\end{aligned}$$

Par définition, le schéma est bien d'ordre au moins 2 en temps et en espace, et il est exactement de cet ordre car il n'y a aucune raison que le terme $-\frac{7h^3}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_{n+1},x_j) - \frac{hk^2}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_{n+1},x_j)$ s'annule.

3. Si les racines (réelles ou complexes) sont doubles, il est nécessaire et suffisant qu'elles soient de module inférieur ou égal à 1. Dans le cas d'une racine simple, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit de racine strictement plus petit que 1.

4. Cette question n'est pas évidente. On effectue l'analyse de Von Neumann. En posant $v_n(\xi) = \mathcal{F}(U_n)(\xi)$ et les propriétés de la translation, on obtient

$$\frac{1}{2h}\left(3v_{n+1}(\xi) - 4v_n(\xi) + v_{n-1}(\xi)\right) - \frac{1}{k^2}\left(e^{ik\xi} - 2 + e^{-ik\xi})v_{n+1}(\xi)\right) = 0,$$

i.e.

$$\left(3 - \frac{4h}{k^2}\left(\cos(k\xi) - 1\right)\right)v_{n+1}(\xi) - 4v_n(\xi) + v_{n-1}(\xi) = 0,$$

On utilise maintenant la formule bien connue $1 - \cos(k\pi) = \sin^2\left(\frac{k\xi}{2}\right)$. On obtient donc, en utlisant le C de l'énoncé,

$$(3 + 2C)\,v_{n+1}(\xi) - 4v_n(\xi) + v_{n-1}(\xi) = 0,$$

On calcule le discriminant. On a $\Delta = 16 - 4(3+2C) = 4 - 8C$. On distingue donc trois cas:

- $4 - 8C > 0$, i.e.$C < \frac{1}{2}$. On a alors deux racines données par

$$\frac{4 \pm \sqrt{\Delta}}{2(3+2C)}.$$

Comme $C \geqslant 0$ et $\sqrt{\Delta} \in]0,2]$, on déduit facilement que les deux racines sont positives et inférieures ou égales à 1.

- $4-8C=0$, i.e. $C=\frac{1}{2}$. On a alors une racine double donnée par
$$\frac{4}{2(3+2C)}=\frac{2}{3+2C}=\frac{1}{2}.$$
La racine est bien en valeur absolue strictement plus petite que 1.
- $4-8C<0$, i.e. $C>\frac{1}{2}$. On a alors deux racines données par
$$\frac{4\pm i\sqrt{\Delta}}{2(3+2C)}.$$
Le module au carré de chacune des ces racines vaut
$$\frac{16+\Delta}{4(3+2C)^2}=\frac{16+4-8C}{4(3+2C)^2}=\frac{5-2C}{(3+2C)^2}.$$
Comme $C>\frac{1}{2}$, on a
$$\frac{5-2C}{(3+2C)^2}<\frac{4}{16}\leqslant<\frac{1}{4}.$$
Le module de chacune des deux racines est donc inférieur à $\frac{1}{2}$.

Dans chacun des cas, la condition de la question 3 est vérifiée, on a donc bien que le schéma est inconditionnellement stable, et donc inconditionnellement convergent à l'ordre 2 en temps et en espace.

Exercice 3 (Solution de d'Alembert de l'équation des ondes avec vitesse initiale nulle, 5 points)**.**

1. On suppose (2) vérifiée. On pose alors
$$v(t,x):=\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)-c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x).$$
Par définition, la première ligne de (3) est vérifiée, et il est alors clair que la deuxième aussi puisque d'après le théorème de Schwarz,
$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+c\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)-c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)+c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)-c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)-c\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(t,x)+c\frac{\partial u}{\partial x\partial t}(t,x)-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\\&=0.\end{aligned}$$
u vérifie bien $u(0,x)=u_0(x)$ et on voit donc en utilisant la dernière ligne de (2) que
$$v(0,x)=\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)-c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)=-cu^{0\prime}(x).$$
L'équation (3) est donc bien vérifiée avec $v^0(x)=-cu^{0\prime}(x)$. Inversement, si (3) est vérifié avec $v^0(x)=-cu^{0\prime}(x)$, il est déjà clair que $u(0,x)=u^0(x)$ et par la première équation appliquée en $(0,x)$ (ce qui est possible par continuité)
$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=c\frac{\partial u}{\partial x}(0,x)+v(0,x)=cu^{0\prime}(x)-cu^{0\prime}(x)=0.$$
De plus, on a que
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)v(t,x)=0.$$
Donc (2) est bien vérifié.

2. On a vu en cours que $v(t,x) = v^0(x-ct) = -cu^0 0'(x-ct)$.

3. g est de classe C^1 comme composition de fonctions de classe C^1. La règle de dérivation de fonctions composées à plusieurs variables donne

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,x) - c\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) = -cf'(x-ct) - cf'(x-ct) = -2cf'(x-ct).$$

4. Par la question précédente, on remarque que la fonction

$$\tilde{u}(t,x) = \frac{u^0(x-ct)}{2}$$

vérifie

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t,x) - c\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t,x) = -u^0(x-ct) = v(t,x).$$

le couple $(\tilde{u}, v)$ vérifie bien les eux premières lignes de (3). Malheureusement, on voit que $\tilde{u}(0,x) = \frac{u^0(x)}{2}$. Par linéarité, on va superposer $\tilde{u}$ avec une solution appropriée de

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t,x) - c\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t,x) = 0,$$

à savoir

$$\overline{u}(t,x) = \frac{u^0(x+ct)}{2}.$$

Il est alors facile de voir que

$$u(t,x) = \frac{u^0(x+ct)}{2} + \frac{u^0(x-ct)}{2}$$

et le même v que précédemment vérifient bien maintenant toutes les équations du système (3) et donc que u vérifie (2).

*

*   *