# Examen du 31 mai 2019

*Les calculatrices et téléphones sont interdits. Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la précision de la rédaction. Le barème est donné à titre indicatif et pourra éventuellement être légèrement modifié.*

Durée: 2 heures

**Exercice 1** (Question de cours, 5 points)**.** Pour les équations stochastiques, rappeler les définitions des schémas d'Euler-Maruyama et de Milstein, puis énoncer la définition de la consistance forte et démontrer la consistance forte de chacun de ces deux schémas (on supposera toutes les fonctions aussi régulières que nécessaire).

**Exercice 2** (Un schéma multi-pas pour les EDO, 6 points)**.** On considère un problème de Cauchy scalaire

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $f$ est supposée définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et est globalement uniformément lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. On s'intéresse à l'approximation de ce problème sur un l'intervalle de temps $[0,1]$. On se donne un $N$ destiné à tendre vers $+\infty$ et une grille usuelle de discrétisation à pas constant $t_n = n/N = nh$, avec $h = 1/N$ le pas de discrétisation. On considère le schéma d'approximation numérique suivant:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{12}\left(23f(t_n, x_n) - 16f(t_{n-1}, x_{n-1}) + 5f(t_{n-2}, x_{n-2})\right).$$

1. Quel est le nombre de pas $r+1$?
2. Donner les $\alpha_i$ et $\beta_i$ tels que le schéma puisse s'écrire sous la forme

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i x_{n-i} + h \sum_{i=0}^{r} \beta_i f(t_{n-i}, x_{n-i}).$$

3. Trouver l'ordre exact du schéma.
4. Ce schéma est-t-il stable? Est-il convergent?

**Exercice 3** (Schéma de Gear pour l'équation de la chaleur, 7 points)**.** On s'intéresse à l'approximation de l'équation de la chaleur sur $(0,T) \times (0,1)$ avec condition de Dirichlet homogène

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_{xx} u &= 0, \\ u(0,x) = u^0(x) &\in C^\infty([0,1]), \\ u(t,0) = u(t,1) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

la condition initiale vérifiant $u^0(0) = u^0(1) = 0$. Soit $J, N$ des entiers $> 0$. On pose

$$t_n := Tn/N \text{ et } x_j := j/J.$$

ainsi que les pas respectivement de temps et d'espace

$$h := T/N \text{ et } k := 1/J.$$

On pose $u_j^n$ une approximation de $u(t_n, x_j)$ . La condition initiale est supposée être approchée de manière exacte par $u_j^0 := u^0(x_j)$. On a les conditions au bord $u_0^n = u_J^n = 0$ pour $n \in [0, N]$. On s'intéressera au schéma donné par la relation suivante:

$$\frac{1}{2h}\left(3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}\right) - \frac{1}{k^2}\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right) = 0.$$

1. On pose $U_n$ le vecteur (de $\mathbb{R}^{J-1}$)
$$\begin{pmatrix} u_1^n \\ \dots \\ u_{J-1}^n \end{pmatrix},$$
ainsi que $V_n$ le vecteur (de $\mathbb{R}^{2J-2}$)
$$\begin{pmatrix} U_n \\ U_{n-1} \end{pmatrix}.$$
Démontrer que le schéma se réécrit sous la forme $V_{n+1} = BV_n$ avec $B$ une matrice (dont on justifiera l'existence) à déterminer.

2. Démonter que ce schéma est exactement d'ordre 2 en temps et en espace.

Nous allons nous intéresser maintenant à l'analyse de stabilité. On rappelle que les suites solutions d'une relation linéaire de la forme $au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = 0$ (avec $a, b, c$ réels, $a \neq 0$) sont de la forme: soit $u_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$, où $A$ et $B$ sont des constantes, si le polynôme $aX^2 + bX + c$ a deux racines distinctes (éventuellement complexes) $r_1$ et $r_2$, soit $u_n = A(r_1)^n + Bn(r_1)^n$, où $A$ et $B$ sont des constantes, si le polynôme $aX^2 + bX + c$ a une racine double $r_1$.

3. Donner sans justification une condition nécessaire et suffisante sur les racines pour que toutes les suites de la forme précédente soient bornées (on fera bien attention à traiter à part le cas où la racine est double).

4. Effectuer l'analyse de stabilité du schéma et montrer qu'il est inconditionnellement stable. Pour simplifier les calculs, on pourra introduire la quantité
$$C = \frac{4h}{k^2} \sin\left(\frac{\xi k}{2}\right)^2,$$
et traiter séparément les cas $C < \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$ et $C > \frac{1}{2}$.

Que peut-on en déduire?

**Exercice 4** (Solution de d'Alembert de l'équation des ondes avec vitesse initiale nulle, 5 points)**.** Soit $c > 0$. On s'intéresse à l'équation suivante:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0,\ (t,x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \\ &u(0,x) = u^0(x),\ x \in \mathbb{R}, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2}$$

où $u^0 \in C^2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que (2) est équivalent à un système de la forme
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = v(t,x),\ \ (t,x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \\ \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + c\frac{\partial v}{\partial x}(t,x) = 0,\ \ (t,x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u^0(x)\ x \in \mathbb{R},\ v(0,x) = v^0(x)\ x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{3}$$
où on déterminera quelle est la fonction $v^0 \in C^1(\mathbb{R})$.

2. Trouver explicitement $v$ en utilisant la méthode des caractéristiques.

3. Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. On pose $g(t,x) = f(x - ct)$. Montrer que $g \in C^1(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R})$ et calculer $\frac{\partial g}{\partial t}(t,x) - c\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)$.

4. En déduire une solution $u$ à (3) puis à (2).

5. Démontrer l'unicité de la solution trouvée. On pourra s'intéresser à la différence de deux solutions à (2).

*

*  *