TD 3: équations différentielles stochastiques

Dans cette feuille, on considère l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}X(t) = f(t, X(t))\,\mathrm{d}t + g(t, X(t))\,\mathrm{d}B(t),\ t \in [0, T],$$

dans laquelle le processus de Wiener B est fixé et adapté à filtration naturelle $\{\mathcal{F}_t,\ 0 \leq t \leq T\}$.
On suppose que la donnée de la condition initiale $X(t_0) = Z$ est mesurable,de carré intégrable, indépendante par rapport à $\{\mathcal{F}_t,\ 0 \leq t \leq T\}$, et que les fonctions f et g sont telles que les processus $\{f(t, X(t)),\ 0 \leq t \leq T\}$ et $\{g(t, X(t)),\ 0 \leq t \leq T\}$ sont adaptés à la filtration $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$, satisfont $\int_0^T (|f(s, X(s))| + |g(s, X(s))|)^2\,\mathrm{d}s < +\infty$ presque sûrement. On les supposera aussi aussi régulières que nécessaire, notamment de sorte qu'il existe une unique solution forte de l'équation sur l'intervalle $[0, T]$. On suppose également que les méthodes numériques utilisent une grille de discrétisation uniforme, de pas de longueur h.

Exercice 1 (méthode d'Euler–Maruyama faible)**.** On suppose dans cet exercice la fonction f bornée et l'on considère la méthode numérique de schéma

$$X_{n+1} = X_n + f(t_n, X_n)\,h + g(t_n, X_n)\,\xi_n\sqrt{h},\ n = 0, \ldots, N-1,$$

les quantités ξ_n, $n = 0, \ldots, N-1$, étant des variables aléatoires indépendantes deux à deux, ainsi que de la filtration $\{\mathcal{F}_t,\ 0 \leq t \leq T\}$, et telles que $P(\xi_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$.

1. Montrer que cette méthode est faiblement consistante.
2. Cette méthode est-elle fortement consistante ?

Exercice 2 (une généralisation stochastique de la méthode de Heun)**.** On suppose dans cet exercice que l'équation différentielle stochastique est autonome et que les fonctions f et g sont de classe C^2, bornées et à dérivées bornées. On considére alors la généralisation formelle suivante de la méthode de Heun au cas stochastique, donnée par le schéma

$$\begin{aligned} X_{n+1} = X_n &+ \frac{1}{2}\,\left(f(X_n) + f(X_n + f(X_n)\,h + g(X_n)\,\Delta B_n)\right)\,h \\ &+ \frac{1}{2}\left(g(X_n) + g(X_n + f(X_n)\,h + g(X_n)\,\Delta B_n)\right)\,\Delta B_n, \end{aligned}$$

où l'on a posé $\Delta B_n = B_{t_{n+1}} - B_{t_n}$.

Montrer que cette méthode n'est généralement pas fortement consistante.

Exercice 3. Donner deux exemples de fonctions f et g pour lesquels la méthode d'Euler–Maruyama a un ordre de convergence forte respectivement strictement supérieur à un et strictement inférieur à un.

Exercice 4 (Second schéma de Milstein pour les EDS, examen de mai 2016)**.** On considère l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}X(t) = f(t, X(t))\,\mathrm{d}t + g(t, X(t))\,\mathrm{d}B_t,\ t \in [0, T],$$

dans laquelle le processus de Wiener B_t est fixé et adapté à filtration naturelle $\{\mathcal{F}_t,\ 0 \leq t \leq T\}$.
On suppose que la donnée de la condition initiale $X(t_0) = Z$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_0$ et que les fonctions f et g sont telles que les processus $\{f(t, X(t)),\ 0 \leq t \leq T\}$ et $\{g(t, X(t)),\ 0 \leq t \leq T\}$ sont adaptés à la filtration $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ et sont suffisamment régulières.

On s'intéresse à l'approximation de ce problème sur un l'intervalle de temps $[0, 1]$. On se donne un N destiné à tendre vers $+\infty$ et une grille usuelle de discrétisation à pas constant $t_n = n/N = nh$, avec $h = 1/N$ le pas de discrétisation. On appellera $\Delta B_n := B_{t_{n+1}} - B_{t_n}$. On s'intéresse au schéma suivant, appelé second schéma de Milstein:

$$Y_{n+1} = Y_n + h\left(f - \frac{g\partial_x g}{2}\right) + g\Delta B_n + \frac{g\partial_x g}{2}(\Delta B_n)^2 + h\left(\frac{f\partial_x g}{2} + \frac{g\partial_x f}{2} + \frac{g^2\partial^2_{xx}g}{4}\right)\Delta B_n + h^2\left(\frac{f\partial_x f}{2} + \frac{g^2\partial^2_{xx}f}{4}\right),$$

où il est sous-entendu que $f = f(t_n, Y_n)$ et $g = g(t_n, Y_n)$. Ce schéma est-il fortement consistant?

Remarque 1. *On peut montrer que ce schéma est faiblement consistant (mais les calculs sont plus compliqués), son intérêt étant qu'il est faiblement convergent* ***à l'ordre*** 2*, améliorant le premier schéma de Milstein.*