# Contrôle du 14 novembre

**Question sur le cours.** Soit $(X, \mathrm{d})$ un espace métrique.

1. Enoncer la définition de partie ouverte et de partie fermé de $X$;
2. Enoncer la définition d'adherence d'une partie de $X$;
3. Enoncer et démontrer la caractérisation séquentielle de l'adherence.

---

**Exercice 1.** Soit $(E, \mathfrak{n})$ un evn.

1. Montrer que si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ qui contient une boule ouverte, alors $F = E$.
2. Montrer que si $B(x, r) = B(y, \rho)$ pour $x, y \in E$ et $r, \rho > 0$, alors $x = y$ et $r = \rho$. Ce fait reste-t-il vrai dans un espace métrique ?

**Exercice 2.** Soit $K : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi \in C([0, 1])$.

1. Montrer que pour $\lambda > 0$ assez petit, il existe un unique $f \in C([0, 1])$ tel que
$$f(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)f(y)\, dy + \varphi(x).$$
2. Est-ce que ce résultat réste vrai si $\varphi \notin C([0, 1])$ ? Pourquoi ?

**Exercice 3.** Soit $(X, \mathrm{d})$ un espace métrique. Si $(X, \mathrm{d})$ est complet et $(\bar{B}_n)_n$ est une suite de boules fermées $\bar{B}_n = \bar{B}(x_n, r_n)$ tels que $\bar{B}_{n+1} \subset \bar{B}_n$ pour tout $n$ et $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, montrer que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{B}_n \neq \varnothing.$$

Est-ce que ce résultat reste vrai si $(X, \mathrm{d})$ n'est pas complet, mais $\bar{B}_1$ est compacte ?

**Exercice 4.** Nous rappelons que une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne s'il existe $L > 0$ tel que
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in [0, 1].$$

Notons avec $\mathrm{Lip}([0, 1])$ l'espace des fonctions lipschitziennes sur $[0, 1]$. Montrer que :

1. $\mathrm{Lip}([0, 1])$ est un sous-espace vectoriel de $C([0, 1])$.
2. La fonction suivante est une norme sur $\mathrm{Lip}([0, 1])$ :
$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := |f(0)| + L(f), \quad \text{où} \quad L(f) := \sup_{x,y\in[0,1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$
3. On a que
$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}} \qquad \forall f \in \mathrm{Lip}([0, 1]).$$
4. L'espace $\mathrm{Lip}([0, 1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ est de Banach.
5. Est-ce que de même est vraie pour $\mathrm{Lip}([0, 1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ ?