Contrôle du 13 novembre

Question sur le cours. 1. Enoncer la définition de suite de Cauchy;

2. Montrer que une suite de Cauchy est convergente si et seulement si elle admet une sous-suite extraite convergente;

3. Démontrer ou donner un contre-example pour l'affirmation suivante. "Toute suite de Cauchy est convergente."

Exercice 1. Soit $(E, \mathfrak{n})$ un evn.

1. Montrer que si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient une boule ouverte, alors $F = E$.

2. Montrer que si $B(x,r) = B(y,\rho)$ pour $x, y \in E$ et $r, \rho > 0$, alors $x = y$ et $r = \rho$. Ce fait reste-t-il vrai dans un espace métrique ?

Exercice 2.

1. Montrer que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\ell^2(\mathbb{R})$ n'est pas fermé dan $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ à l'aide de la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \ell^\infty$, où $x^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$x_n^k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } 1 \leq n \leq k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Est-ce qu'on peut déduire ce résultat du fait que $(\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ n'est pas complet, en utilisant l'equivalence entre parties fermées et sous-espaces métriques complets ?

Exercice 3. On s'intéresse à montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t)e^{int}\, dt = 0, \qquad \forall f \in C([0,1]).$$

À cette effet, soit

$$\mathcal{A}([0,1]) = \{f \in C([0,1]) \mid f \text{ est affine par intervalles}\}.$$

1. Montrer cette rélation lorsque $f \in C^1([0,1])$, et puis $f \in \mathcal{A}([0,1])$;

2. Montrer que $\mathcal{A}([0,1])$ est une partie dense de $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, en admettant le Théorème de Heine (c-á-d que toute fonction de $C([0,1])$ est uniformément continue);

3. En déduire la relation pour toute fonction continue.

Exercice 4. Considerons l'application $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ defini par

$$Tf(x) := \int_0^x t^2 f(t)\, dt + \frac{1}{2}, \qquad \forall f \in C([0,1]).$$

1. Montrer que T est une application contractante par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$ et en deduire qu'elle admet un point fixe $f_0 \in C([0,1])$;

2. Montrer que $\|f_0\| \leq 1$.

Exercice 5. On considère l'ensemble $\mathcal{B}$ des fonctions bornées $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, c.-à-d. :

$$\mathcal{B} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \exists M > 0 \text{ t.q. } |f(x)| \leq M,\ \forall x \in [0,1]\}.$$

On le munit de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. Pourquoi est elle une norme sur $\mathcal{B}$?
2. Écrire que $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{B}, \| \cdot \|_\infty)$.
3. Justifier qu'il existe une fonction f telle que pour tout $x \in [0,1]$, $\lim_n f_n(x) = f(x)$. Pourquoi est-elle bornée sur $[0,1]$?
4. Montrer que $(\mathcal{B}, \| \cdot \|_\infty)$ est complet.