Corrigé de l'examen du 20 janvier 2023

Durée: 2 heures

Question de Cours (3 points) Voir cours.

Exercice 1 (4 points). 1. (1 point) Comme f et f' sont continues, leurs normes infinies sont finies, donc $\|f\|_{C^1}$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

- Séparation : si $\|f\|_{C^1} = 0$, notamment $\|f\|_\infty = 0$ et donc $f = 0$.
- Homogénéité positive : si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, alors

$$\|\lambda f\|_{C^1} = \|\lambda f\|_\infty + \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda| \left(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right).$$

- Inégalité triangulaire : si $f, g \in E$, par inégalité triangulaire pour la norme $|| \cdot ||_\infty$ et linéarité de la dérivée,

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{C^1} &= \|f+g\|_\infty + \|(f+g)'\|_\infty \\ &= \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \\ &\leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty \\ &= (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty) + (\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty) \\ &= ||f||_{C^1} + ||g||_{C^1}. \end{aligned}$$

(0,5 points) $\Rightarrow$: si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f au sens de la norme C^1, cela signifie que $\|f - f_n\|_\infty + \|f_n' - f'\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$. Mais les deux quantités à gauche étant positives, on a donc $0 \leqslant \|f - f_n\|_\infty \leqslant \|f - f_n\|_\infty + \|f_n' - f'\|_\infty \to 0$ et pareil avec $\|f_n' - f'\|_\infty$, donc on a bien par théorème d'encadrement que $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ et $\|f_n' - f'\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f'.

$\Leftarrow$: inversement, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f', alors $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ et $\|f_n' - f'\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$, par somme de suites convergentes dans $\mathbb{R}$, on a $\|f - f_n\|_\infty + \|f_n' - f'\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$, *i.e.* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f au sens de la norme C^1.

2. (2,5 points) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de de Cauchy de $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_{C^1})$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n, m \geqslant N$, on ait

$$\|f_n - f_m\|_\infty + \|f_n' - f_m'\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Notamment :

- $\|f_n - f_m\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle-même une suite de de Cauchy dans l'espace de Banach $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ (puisque les f_n sont continues), donc il existe $f \in C^0([0,1])$ telle que f_n converge uniformément vers f.
- $\|f_n' - f_m'\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Donc $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle-même une suite de de Cauchy dans l'espace de Banach $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ (puisque les f_n' sont continues), donc il existe $g \in C^0([0,1])$ telle que f_n' converge uniformément vers g.

Pour pouvoir appliquer la question précédente et en déduire que $f_n \to f$ en norme C^1, il est donc suffisant de montrer que $g = f'$. Une manière de procéder est de remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, on a

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'(t)dt.$$

La convergence uniforme entraînant la convergence simple, on a $f_n(x) \to f(x)$ et $f_n(0) \to f(0)$ quand $n \to +\infty$. De plus, $\int_0^x f_n'(t)dt \to \int_0^x g(t)dt$ quand $n \to +\infty$. En effet,

$$|\int_0^x f_n'(t)dt - \int_0^x g(t)dt| = |\int_0^x (f_n'(t) - g(t)dt| \leqslant \int_0^x |f_n'(t) - g(t)|dt \leqslant \int_0^1 |f_n'(t) - g(t)|dt \leqslant ||f_n' - g||_\infty \to 0.$$

D'où le résultat voulu. Par unicité de la limite

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)dt.$$

En dérivant de chaque côté, on en déduit que $f'(x) = g(x)$, d'où le résultat voulu.

Exercice 2 (6,5 points). 1. (1 point) C'est une conséquence immédiate du théorème fondamental de l'analyse : pour tout $y, y' \in [0,1]$, on a

$$\left|e^y - e^{y'}\right| = |\int_{[y,y']} e^t dt| \leqslant |\int_{[y,y']} e dt| = e|y - y'|.$$

2. (1,5 points) On doit montrer que Tf est continue si f est continue. On utilise la caractérisation séquentielle et la question précédente : si $x_n \to x$ dans $[0,1]$, on a pour tout $t \in [0,1]$ que $tx, tx_n \in [0,1]$ donc

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |Tf(x_n) - Tf(x)| &= |\int_0^1 e^{tx_n} f(t)dt - \int_0^1 e^{tx} f(t)dt| \\ &\leqslant \int_0^1 |e^{tx_n} - e^{tx}||f(t)|dt \\ &\leqslant ||f||_\infty \int_0^1 te|x_n - x|dt \\ &\leqslant ||f||_\infty e|x_n - x|. \end{aligned}$$

Le membre de droite tendant vers 0 puisque $x_n \to x$, celui de gauche aussi par encadrement, donc $Tf(x_n) \to Tf(x)$. Tf et donc continue en x pour tout $x \in [0,1]$, donc est continue, et appartient bien à E.

3. (1,5 points) Soit $f \in E$. On a que pour tout $x \in [0,1]$,

$$|Tf(x)| = |\int_0^1 e^{tx} f(t)dt| \leqslant \int_0^1 e^{tx}|f(t)|dt \leqslant ||f||_\infty \int_0^1 e^{tx}dt \leqslant ||f||_\infty \int_0^1 e^t dt = ||f||_\infty (e-1).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que

$$||Tf||_\infty \leqslant (e-1)||f||_\infty.$$

Donc T est bien continu, et par définition de la norme triple, on a $|||T||| \leqslant e - 1$.

4. (0,5 points) Clairement $T(1)(0) = 1$ et pour tout $x > 0$, on a

$$T(1)(x) = \int_0^1 e^{tx}dt = \left[\frac{e^{tx}}{x}\right]_0^1 = \frac{e^x - 1}{x}.$$

5. (1 point) Il y a plusieurs manières de procéder. On peut par exemple dériver f sur $]0,1]$, elle est bien C^1 de dérivée

$$f'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}.$$

f' est positive si et seulement si $g(x) = (x-1)e^x + 1$ est positive. On a que $g(0) = 0$, que g est de classe C^1 sur $[0,1]$ de dérivée $g'(x) = (x-1)e^x + e^x = xe^x$. Cette quantité est positive, donc g' et croissante et vaut 0 en 0 donc est positive sur $[0,1]$, et c'est aussi le cas de f' sur $]0,1[$, ce qui conclut le raisonnement.

6. (1 point) Comme $T(1)$ est croissante et positive, on a que $||T(1)||_\infty = T(1)(1) = e - 1$. Or $||1||_\infty = 1$, donc par définition de la norme triple, on a $|||T||| \geqslant e - 1$, et donc finalement, $|||T||| = 1$.

Exercice 3 (3,5 points). 1. (1 point) Le cours assure que toute partie compacte de X est fermée et bornée. Inversement, si A est une partie fermée et bornée de X. Comme A est bornée, elle est incluse dans une boule $B(0, M) \subset B_f(0, M)$ avec $M > 0$, donc elle est incluse dans une boule fermée qui est compacte par hypothèse. A est donc un fermé inclus dans un compact, c'est donc un compact.

2. (2,5 points) Une partie complète de X est nécessairement fermée. En effet, si A est une partie complète de X, et si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $x \in X$, alors, notamment $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans X d'éléments de A, c'est donc une suite de Cauchy dans $(A, d_{|A})$. Comme A est complet, cette suite de Cauchy converge cers $a \in A$ pour $d_{|A}$ dans A et donc aussi dans (X, d). Par unicité de la limite, $x = a \in A$. Par caractérisation séquentielle des fermés, A est bien fermée.

   Inversement, si A est une partie fermée de X. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy d'éléments de A. Une suite de Cauchy étant bornée, elle est incluse dans une boule $B(0,M) \subset B_f(0,M)$ avec $M > 0$, donc elle est incluse dans une boule fermée qui est compacte par hypothèse. Une suite d'un compact admet une valeur d'adhérence, donc il existe φ extraction, il existe $x \in B_f(0,M)$ tel que $a_{\varphi(n)} \to x$. A étant fermé, en réalité $x \in A$. Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente dans A, elle converge donc dans A, ce qui montre bien que A est complet.

Exercice 4. (3,5 points)

1. (1,5 points) Non. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, on considère l'anneau fermé $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2\}$. Cet ensemble est clairement fermé par caractérisation séquentielle. Son intérieur est l'anneau ouvert $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 < x^2+y^2 < 2$. Donc sa frontière est l'union de deux cercles disjoints $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 = 2\}$. Puisque ces deux cercles disjoints sont tous les deux fermés, on a donc décomposé la frontière en deux parties non vides disjointes fermées, ce qui nie la connexité par une des caractérisations du cours.

2. (2 points). Non. Prenons par exemple une matrice inversible A de déterminant strictement négatif (il en existe, on prend une matrice diagonale avec un -1 sur la première ligne et des 1 sur les autres ligners). Si $GL_n(\mathbb{R})$ était connexe par arcs, on pourrait trouver un chemin continu $\gamma : [0,1] \to GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = Id$. Le déterminant étant une fonction continue des coefficients d'une matrice (puisque c'est une combinaison linéaire de produits des éléments de la matrice), $\det \circ \gamma$ est un fonction continue à valeurs réelles, valant -1 en 0 et 1 en 1. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on a donc qu'il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que $\det(\gamma(t_0)) = 0$. Donc la matrice $\gamma(t_0)$ n'est pas inversible, ce qui donne la contradiction voulue.

Exercice 5 (3,5 points)**.** Notons L l'ensemble considéré. Comme $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n)$ est de dimension finie, pour montrer que L est compact, il est suffisant de montrer que L est fermé et borné. Par équivalence des normes en dimension finie, on peut travailler avec une norme triple $|||\cdot|||$ associée à une norme $||\cdot||$ sur $\mathbb{R}^n$.

- L est fermé : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de L et $f \in \mathcal{L}_c(E)$ telle que $f_n \to f$ pour $|||\cdot|||$. Soit $x \in K$. Alors $f_n(x) \in K$ par hypothèse. Comme $||f_n(x) - f(x)|| \leqslant |||f_n - f|||\,||x||$, on a aussi que $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$. K étant compact, il est fermé, donc $f(x) \in K$. Ainsi, $f(K) \subset K$ et $f \in L$.

- L est borné : Comme K est compact, il est borné et donc inclus dans une certaine boule $B_f(0,M)$. Soit alors $f \in L$. Comme $B(0,a) \subset K$, on a entre autres $f(B(0,a)) \subset K \subset B(0,M)$. Notamment, pour tout $x \in S(0,1)$, $ax \in B_f(0,a)$. Donc $||f(ax)|| \leqslant M$, donc $||f(x)|| \leqslant \frac{M}{a}$. Par une des définitions de la norme triple, on en déduit donc que $|||f||| \leqslant \frac{M}{a}$. Donc $L \subset B_f\left(\frac{M}{a}\right)$ et L est bien borné.

*

* *