Corrigé du partiel du 4 novembre 2022

Durée: 2 heures

Cours (3 points) Voir le polycopié de cours.

Exercice 1. (6 points)

1. (1,5 points) On raisonne par caractérisation séquentielle. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de X qui converge vers un certain $x \in X$. On souhaite montrer que $g \circ f(x_n)$ converge vers $g \circ f(x)$, autrement dit que $g(f(x_n)) \to g(f(x))$ quand $n \to \infty$. f étant continue, on sait que $f(x_n) \to f(x)$ quand $n \to \infty$. g étant continue, on a donc que $g(f(x_n)) \to g(f(x))$ quand $n \to \infty$, d'où le résultat voulu.

2. (1 point) On utilise la caractérisation de la frontière donnée en cours : on sait que $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Donc on a bien que $\mathrm{Fr}(X \setminus A) = \overline{X \setminus A} \cap \overline{X \setminus (X \setminus A)} = \overline{X \setminus A} \cap \overline{A} = \mathrm{Fr}(A)$.

3. (2 points) On a déjà clairement que $\mathrm{Vect}(U) \subset E$. Reste à montrer l'inclusion inverse. Soit $x \in E$. Si $x = 0$, on sait déjà que $x \in \mathrm{Vect}(U)$ car celui-ci contient forcément 0. Supposons donc que $x \neq 0$. On sait par définition d'un ouvert que si l'on se donne un $x_0 \in U$ quelconque, on a existence d'un $r > 0$ tel que par exemple $B(x_0, 2r) \subset U$, notamment $B_f(x_0, r) \subset B(x_0, 2r) \subset U$. On remarque alors que $y = x_0 + r\frac{x}{||x||} \in B_f(x_0, r) \subset U \subset \mathrm{Vect}(U)$. $\mathrm{Vect}(U)$ étant un espace vectoriel et x_0 étant dans u, on en déduit que $y - x_0 \in \mathrm{Vect}(U)$, donc $r\frac{x}{||x||} \in \mathrm{Vect}(U)$. Encore une fois, $\mathrm{Vect}(U)$ étant un espace vectoriel, on peut multiplier $r\frac{x}{||x||}$ par $||x||/r$ et on obtient que $x \in \mathrm{Vect}(U)$.

4. (1,5 points) Il y a différentes manières de raisonner. Raisonnons par l'absurde, et supposons par exemple que A est d'intérieur non vide. Donc il existe $x_0 \in A$ et $r > 0$ tels que $B(x_0, r) \subset A$. $B(x_0, r)$ étant un ouvert de X, la caractérisation topologique de la densité nous dit que $B(x_0, r) \cap B \neq \emptyset$. Donc notamment, $A \cap B \neq \emptyset$, ce qui est supposé faux par hypothèse. Donc A est d'intérieur vide et un raisonnement identique donne que B est d'intérieur vide, en échangeant le rôle de A et B dans le raisonnement précédent.

Exercice 2. (3 points)

1. (0,75 points)
$$\mathring{A} =]1,2[\times]1,2[,$$
$$\overline{A} = [1,2] \times [1,2],$$
$$\mathrm{Fr}(A) = \{1\} \times [1,2] \cup \{2\} \times [1,2] \cup [1,2] \times \{1\} \cup [1,2] \times \{2\}.$$

2. (0,75 points)
$$\mathring{B} = B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, 0 < x^2 + y^2 < 1\},$$
$$\overline{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$
$$\mathrm{Fr}(B) = \{0,0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

3. (0,75 points)
$$\mathring{C} = \emptyset,$$
$$\overline{C} = [0,1] \times [0,1],$$
$$\mathrm{Fr}(C) = \overline{C} = [0,1] \times [0,1].$$

4. (0,75 points)
$$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$
$$\mathring{D} = D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(t,0) | t \in]0,1[\}.$$
$$\mathrm{Fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(t,0) | t \in [0,1]\}.$$

Exercice 3. (8 points)

1. (1 point) On revient à la définition de la distance. D'abord, clairement $\delta : X \times X \to \mathbb{R}^+$ comme maximum de fonctions positives. Le caractère symétrique est évident : si $(x, y) \in X^2$, on a $\delta(y, x) = \max(d_1(y, x), d_2(y, x)) = \max(d_1(x, y), d_2(x, y)) = \delta(x, y)$. Le caractère défini aussi : si $\delta(x, y) = 0$, alors $\max(d_1(x, y), d_2(x, y)) = 0$, or $d_i(x, y) \geqslant 0$ pour $i = 1, 2$, donc $d_1(x, y) = 0$ et $d_2(x, y) = 0$, ce qui signifie que $x = y$. Inversement, $\delta(x, x) = \max(d_1(x, x), d_2(x, x)) = \max(0, 0) = 0$. L'inégalité triangulaire reste aussi vérifiée. En effet, si $(x, y, z) \in X^3$, on a $\delta(x, z) = \max(d_1(x, z), d_2(x, z))$. Si $\delta(x, z) = d_1(x, z)$, on a donc
$$\delta(x, z) \leqslant d_1(x, y) + d_1(y, z) \leqslant \max(d_1(x, y), d_2(x, y)) + \max(d_1(y, z), d_2(y, x)) \leqslant \delta(x, y) + \delta(y, z).$$
Le raisonnement est totalement identique si $\delta(x, z) = d_2(x, z)$.

2. (1 point) On raisonne par double inclusion.

   Si $x \in B_\delta(x_0, r)$, alors par définition de δ, on a $\max(d_1(x, x_0), d_2(x, x_0)) < r$, donc $d_1(x, x_0) < r$ et $d_2(x, x_0) < r$, ce qui signifie bien que $x \in B_{d_1}(x_0, r) \cap B_{d_2}(x_0, r)$.

   Inversement, si $x \in B_{d_1}(x_0, r) \cap B_{d_2}(x_0, r)$, alors $d_1(x, x_0) < r$ et $d_2(x, x_0) < r$, donc $\max(d_1(x, x_0), d_2(x, x_0)) < r$, *i.e.* $x \in B_\delta(x_0, r)$.

3. (1 point) On revient à la définition de la distance. D'abord, clairement $d : X \times X \to R^+$ comme somme de fonctions positives. Le caractère symétrique est évident : si $(x, y) \in X^2$, on a $d(y, x) = d_1(y, x) + d_2(y, x) = d_1(x, y) + d_2(x, y) = d(x, y)$. Le caractère défini aussi : si $d(x, y) = 0$, alors $d_1(x, y) + d_2(x, y) = 0$, or $d_i(x, y) \geqslant 0$ pour $i = 1, 2$, donc $d_1(x, y) = 0$ et $d_2(x, y) = 0$, ce qui signifie que $x = y$. Inversement, $d(x, x) = d_1(x, x) + d_2(x, x) = 0 + 0 = 0$. L'inégalité triangulaire reste aussi vérifiée. En effet, si $(x, y, z) \in X^3$, on a
$$\begin{aligned} d(x, z) = d_1(x, z) + d_2(x, z) &\leqslant d_1(x, y) + d_1(y, z) + d_2(x, y) + d_2(y, x) \\ &= (d_1(x, y) + d_2(x, y)) + (d_1(y, z) + d_2(y, z)) \\ &= d_1(x, y) + d_2(y, z). \end{aligned}$$

4. (1 point) On fait un raisonnement direct. Soit $x \in B_{d_1}\left(x_0, \frac{r}{2}\right) \cap B_{d_2}\left(x_0, \frac{r}{2}\right)$. Alors $d_1(x, x_0) < r/2$ et $d_2(x, x_0) < r/2$ donc $d_1(x, x_0) + d_2(x, x_0) < r$, autrement dit $d(x, x_0) < r$ et donc $x \in B_d(x_0, r)$. D'où $B_{d_1}\left(x_0, \frac{r}{2}\right) \cap B_{d_2}\left(x_0, \frac{r}{2}\right) \subset B_\delta(x_0, r)$. Soit maintenant $x \in B_d(x_0, r)$. Alors, par définition, on a $d_1(x, x_0) + d_2(x, x_0) < r$. Notamment, comme le distances sont positives, on a $d_1(x, x_0) < r$ et $d_2(x, x_0) < r$. Donc $x \in B_{d_1}(x_0, r) \cap B_{d_2}(x_0, r)$, d'où l'inclusion $B_\delta(x_0, r) \subset B_{d_1}(x_0, r) \cap B_{d_2}(x_0, r)$.

5. (1,5 points) On raisonne par double implication. Si A est bornée pour d, alors il existe $x_0 \in X$ et $r > 0$ tel que $A \subset B_d(x_0, r)$. Par la question 4, on a donc $A \subset B_{d_1}(x_0, r) \cap B_{d_2}(x_0, r)$. Par la question 2, on en déduit que $A \subset B_\delta(x_0, r)$. Donc A est bornée pour δ.

   Invertsement, si A est borné pour δ, il existe $x_0 \in X$ et $r > 0$ tel que $A \subset B_\delta(x_0, r)$. Par la question 2, on a donc $A \subset B_{d_1}(x_0, r) \cap B_{d_2}(x_0, r)$. En appliquant la question 4 en changeant r en $2r$ (ce qui est possible car $r > 0$ est arbitraire), on a donc $A \subset B_d(x_0, 2r)$. Donc A est bien bornée pour d.

6. (1 point) Oui. Pour tout $(x, y) \in X^2$, on a $d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y) \leqslant 2\max(d_1(x, y), d_2(x, y)) = 2\delta(x, y)$. De plus, clairement, on a $\delta(x, y) = \max(d_1(x, y), d_2(x, y)) \leqslant d_1(x, y) + d_2(x, y) = d(x, y)$. On a donc les inégalités $d(x, y) \leqslant 2\delta(x, y) \leqslant 2d(x, y)$, qui assurent que les normes sont équivalentes.

7. (1,5 points) Comme d_1 et d_2 sont métriquement équivalentes, il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que pour tout $(x, y) \in X^2$, on ait
$$C_1 d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant C_2 d_2(x, y).$$
   Notamment, $d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y) \leqslant (1 + C_2) d_1(x, y)$ et $C_1 d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant d_1(x, y) + d_2(x, y) = d(x, y)$, donc d_1 et d sont métriquement équivalentes. La relation "être métriquement équivalent" est clairement transitive, au sens où si d' est métriquement équivalente à d'' et que d'' est métriquement équivalente à d''', alors d' et d''' sont aussi métriquement équivalentes (il suffit de mettre "bout à bout" les inégalités). Ainsi, ici, d_1 est métriquement équivalente à d donc aussi à δ et aussi à d_2 par hypothèse, donc elles sont toutes métriquement équivalentes entre elles.

Exercice 4. (5 points)

1. (1 point) On raisonne directement. On démarre de l'identité $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$. Donc $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Or $\overline{A} \cup \overline{B}$ est fermé comme union finie de fermés. Donc on peut passer à l'adhérence de chaque côté dans l'inclusion et en déduire que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

2. (2 points) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\overline{A} \cup \overline{B}$ qui converge vers un certain $x \in X$. On veut montrer que $x \in \overline{A \cup B}$. Supposons que le cardinal de l'ensemble des n tels que $x_n \in \overline{A}$ est fini, et et le cardinal des n tels que $x_n \in \overline{B}$ est aussi fini. Alors le cardinal des n tel que $x_n \in \overline{A} \cup \overline{B}$ est aussi fini, ce qui est absurde puisque tous les x_n sont dans $\overline{A} \cup \overline{B}$. Supposons donc que $x_n \in \overline{A}$ pour une infinité de n Alors, cela signifie exactement qu'il existe une extraction φ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $x_{\varphi(n)} \in \overline{A}$. Or $\overline{A}$ est fermé et $x_{\varphi(n)} \to x$ quand $n \to \infty$ comme suite extraite d'une suite convergente vers x. Donc $x \in \overline{A} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

   Si $x_n \in \overline{B}$ pour une infinité de n, le raisonnement serait totalement identique en échangeant le rôle de A et B et on obtiendrait de même $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

3. (2 points) Commençons par montrer que A est fermé. Par la question précédente, on a $\overline{A} \subset \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$. Comme $A \cup B$ est fermé, on en déduit que $\overline{A} \subset A \cup B$. Or $\overline{A} \cap B = \emptyset$ donc aucun élément de $\overline{A}$ ne peut être dans B. Ceci signifie donc *in fine* que $\overline{A} \subset A$. L'inclusion inverse $A \subset \overline{A}$ étant toujours vérifiée par définition de l'édhérence, on en déduit donc que $A = \overline{A}$.

   Pour montrer que B est fermé, le raisonnement est totalement similaire en échangeant A et B dans le raisonnement précédent.

*

* *