Partiel du 4 novembre 2022

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la précision de la rédaction. Le barème est donné à titre indicatif et pourra éventuellement être modifié.

Durée: 2 heures

Cours (3 points) Démontrer que dans un espace métrique (X, d), toute union finie de parties bornées est bornée.

Exercice 1. (6 points) Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient (X, d_X), (Y, d_Y) et (Z, d_Z) trois espaces métriques. Soit $f : X \to Y$ continue, et $g : Y \to Z$ continue. Montrer que $g \circ f$ est continue.
2. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X. Montrer que la frontière de A est égale à la frontière de $X \setminus A$.
3. Soit U un ouvert non vide d'un espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$. Montrer que l'espace vectoriel engendré par U est égal à E tout entier.
4. Soit (X, d) un espace métrique, ainsi que A et B deux parties disjointes et denses de X. Montrer que l'intérieur de A et l'intérieur de B sont vides.

Exercice 2. (3 points) Pour les parties suivantes de $(\mathbb{R}^2, d_2)$, déterminer, sans justification, l'intérieur, l'adhérence et la frontière.

$$A =]1, 2]\times]1, 2], \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x^2 + y^2 < 1\},$$
$$C = (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \times [0, 1], \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < 1, \} \setminus \{(t, 0)|t \in]0, 1[\}.$$

Exercice 3. (8 points) Soit X un ensemble muni de deux distances d_1 et d_2.

1. On pose $\delta = \max(d_1, d_2)$. Montrer que δ est une distance sur X.
2. Montrer que pour tout $r > 0$ et tout $x_0 \in X$, on a
$$B_\delta(x_0, r) = B_{d_1}(x_0, r) \cap B_{d_2}(x_0, r).$$
3. On pose $d = d_1 + d_2$. Montrer que d est une distance sur X.
4. Montrer que pour tout $r > 0$ et tout $x_0 \in X$, on a
$$B_{d_1}\left(x_0, \frac{r}{2}\right) \cap B_{d_2}\left(x_0, \frac{r}{2}\right) \subset B_d(x_0, r) \subset B_{d_1}(x_0, r) \cap B_{d_2}(x_0, r).$$
5. Montrer qu'une partie est bornée pour d si et seulement si elle est bornée pour δ.
6. Les distances d et δ sont-elles métriquement équivalentes ?
7. Montrer que si d_1 et d_2 sont métriquement équivalentes, alors d_1, d_2, d, δ sont toutes métriquement équivalentes.

Exercice 4. (5 points) Soit (X, d) un espace métrique, et A et B deux parties de X.

1. Montrer que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
2. En utilisant un argument à base de suites, démontrer que $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
3. On suppose que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. On suppose que $A \cup B$ est fermé. Démontrer que A et B sont fermés.

*

* *