Topologie et analyse

Pierre Lissy
Basé sur des notes de cours de Dario Prandi,
relues et corrigées par Marc-Antoine Vassenet

13 janvier 2023

Table des matières

Introduction

Ce cours présente les concepts fondateurs de la Topologie et quelques éléments d'Analyse Fonctionnelle. La topologie vise à donner un cadre général (ici, le cadre des espaces dits métriques, puis des espaces vectoriels normés) qui permet d'étudier certaines propriétés géométriques d'ensembles et qui permet de donner un sens aux notions de limites de suites, de continuité, ... L'analyse fonctionnelle est quant à elle une branche des mathématiques qui s'intéresse aux propriétés des espaces de fonctions, et est très reliée à la topologie, comme on le verra dans ce cours.

Ce polycopié est fortement inspiré des polycopiés [1, 4]. Un ouvrage de référence qui pourra être consulté avec profit est [3].

Le niveau de difficulté des exercices est indiqué de la manière suivante : une étoile signifie un exercice proche du cours, qu'il serait donc bon de savoir faire sans trop de difficultés. Deux étoiles signifie un exercice de difficulté moyenne. Trois étoiles signifie un exercice plus difficile.

0 Ensembles dénombrables

Ce chapitre vise à introduire la notion d'ensemble dénombrable, fondamentale en mathématiques. En effet, il est bien connu qu'il existe des ensembles de cardinal fini ou infini, mais parmi les ensembles de cardinal infini, on a envie de dire que certains sont "plus gros" que d'autres. Par exemple, on aurait envie de dire que $\mathbb{R}$ est "plus gros" que $\mathbb{N}$. Nous allons donner un sens plus précis à ceci, puis démontrer que c'est effectivement le cas.

Définition 0.1. Soit E un ensemble. E est dit dénombrable s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$ (ou, ce qui revient au même, une bijection entre $\mathbb{N}$ et E).

Remarque 0.1. De la manière dont est définie la dénombrabilité ici, il est clair que E est nécessairement de cardinal infini. En effet, si E était de cardinal fini, il en serait de même pour $\mathbb{N}$ puisqu'une bijection conserve le cardinal des ensembles finis.

Exemple 0.1. Toute partie de $\mathbb{N}$ est soit finie, soit dénombrable. En effet, si l'on prend une partie A de $\mathbb{N}$, soit elle est de cardinal finie, soit elle est de cardinal infinie. Dans ce dernier cas, on peut énumérer ses éléments sous la forme $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$, où pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $a_i < a_{i+1}$. On pose alors $\varphi : i \in \mathbb{N} \to a_i \in A$. φ est clairement injective (si $i < j$, alors, par récurrence, $a_i < a_j$, donc l'égalité $a_i = a_j$ donne nécessairement que $i = j$) et surjective puisque pour tout $a \in A$, il existe $i_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = a_{i_0}$. Donc φ est une bijection entre A et $\mathbb{N}$. Par exemple, si A est l'ensemble des nombres entiers pairs non nuls, on a $\varphi(i) = 2 + 2i$.

Bien sûr, l'exemple précédent peut se généraliser à tout ensemble dénombrable.

Proposition 0.1. *Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est soit fini, soit dénombrable.*

Démonstration. Soit E un ensemble dénombrable, φ une bijection entre $\mathbb{N}$ et E, et A une partie de E. Si A est fini, il n'y a rien à montrer. Si A est infini, alors $\varphi^{-1}(A)$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$, qui est donc dénombrable par l'exemple 0.1. Soit $\psi : \mathbb{N} \to \varphi^{-1}(A)$ une bijection. Alors $\varphi \circ \psi$ est bien définie et bijective de $\mathbb{N}$ dans $\varphi(\varphi^{-1}(A)) = A$, comme composée de bijections. $\square$

L'avantage principal des ensembles dénombrables réside dans la propriété suivante, qui dit qu'un ensemble est dénombrable si et seulement si on peut énumérer ses éléments, sans omission ni répétition, dans une suite indexée par des entiers.

Proposition 0.2. *Un ensemble E est dénombrable si et seulement si on peut ranger ses éléments en une suite d'éléments distincts $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, i.e. si et seulement si E s'écrit sous la forme $E = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, avec $x_n \neq x_m$, pour tout $n \neq m$.*

Démonstration. Le sens réciproque est trivial : si $E = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\varphi : n \in \mathbb{N} \to x_n \in E$ est une bijection entre $\mathbb{N}$ et E. (c'est le même raisonnement que dans l'exemple 0.1).

Le sens direct n'est pas beaucoup plus difficile : soit φ une bijection entre $\mathbb{N}$ et E. Alors $E = \{\varphi(n) | n \in \mathbb{N}\}$, donc il suffit de poser $x_n = \varphi(n)$. $\square$

Exemple 0.2. $\mathbb{Z}$ est dénombrable. En effet, on peut écrire $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$. On pose alors $x_0 = 0$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{2n-1} = n$ et $x_{2n} = -n$, de telle sorte que l'on a bien $\mathbb{Z} = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$, où les x_n sont deux à deux distincts.

Une propriété importante et utile dans la suite est la suivante.

Proposition 0.3. *Soit E un ensemble dénombrable, F un ensemble quelconque, et $f : E \to F$ une application* surjective. *Alors F est fini ou dénombrable.*

Démonstration. Si F est fini, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc F de cardinal infini. Pour tout $y \in F$, on choisit un $x_y \in E$ tel que $f(x_y) = y$. Alors l'application $g : y \in F \mapsto x_y \in E$ est clairement une application injective, car si $x_y = x_z$, en appliquant f, on a $y = f(x_y) = f(x_z) = z$. Soit $G = g(F)$. Alors $g : F \to G$ est une bijection de F vers $G \subset E$. E étant dénombrable, par la Proposition 0.1, G est fini ou dénombrable. F étant de cardinal infini et g étant une bijection, G ne peut pas être fini, il est donc dénombrable. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to G$ une bijection. Alors $g^{-1} \circ \varphi$ est une bijection de $\mathbb{N}$ vers $g^{-1}(G) = F$, comme composée de bijections. $\square$

On peut déduire du point précédent un analogue pour les fonctions injectives.

Corollaire 0.4. *Soit E un ensemble quelconque, F un ensemble dénombrable, et $f : E \to F$ une application* injective. *Alors E est fini ou dénombrable.*

Démonstration. Si E est de cardinal fini, il n'y a rien à démontrer. Si E est de cardinal infini, f étant injective, $Im(E)$ est de cardinal infini, et $f_{Im(E)}$ est bijective, d'inverse $g : Im(E) \to E$. Par la Proposition 0.1, $Im(E)$ est dénombrable. g étant surjective (puisque bijective), la Proposition 0.3 assure que E est de cardinal fini ou dénombrable (donc dénombrable ici). $\square$

Maintenant, nous allons nous intéresser à des produits d'ensembles dénombrables. La propriété fondamentale est la suivante.

Proposition 0.5. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *est dénombrable.*

Démonstration. Il faut donc réussir à ordonner les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en une suite. On pose $x_0 = (0, 0)$, $x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (0, 1)$, $x_3 = (2, 0)$, $x_4 = (1, 1)$, $x_5 = (0, 2)$, et ainsi de suite. Donnons une formule analytique pour cette construction. On pose

$$\varphi : (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \frac{(n + m)(n + m + 1)}{2} + m.$$

On a alors $\varphi(0, 0) = 0$, $\varphi(1, 0) = 1$, $\varphi(0, 1) = 2$, $\varphi(2, 0) = 3$, et ainsi de suite. φ semble donc convenir pour créer une bijection entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Montrons-le rigoureusement.

— φ est injective : supposons que

$$\frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m = \frac{(n'+m')(n'+m'+1)}{2} + m'. \tag{0.1}$$

On réécrit ceci comme

$$\left(\sum_{k=0}^{n+m} k\right) + m = \left(\sum_{k=0}^{n'+m'} k\right) + m'.$$

Supposons par exemple que $n' + m' > n + m$. Alors on a

$$\sum_{k=n+m+1}^{n'+m'} k = m - m'.$$

Notamment, en prenant le premier terme de la somme, on a nécessairement $n+m+1 \leqslant m - m'$, *i.e.* $n+1 \leqslant -m'$, ce qui est évidemment impossible. Un raisonnement totalement symétrique montrerait que $n'+m' < n+m$ n'est pas non plus possible. Donc $n+m = n'+m'$, et donc l'égalité (0.1) donne $m = m'$, mais comme $n+m = n'+m'$, on a bien aussi que $n = n'$.

— φ est surjective. On se donne $p \in \mathbb{N}$, et on souhaite trouver $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m$. Introduisons la suite $u_q = \sum_{k=0}^{q} k$. C'est une suite d'entiers strictement croissante, qui tend vers $+\infty$ quand $q \to +\infty$. Notamment, il existe un unique $q \in \mathbb{N}$ tel que $p \in [|u_q, u_{q+1}|[$. On pose alors $m = p - u_q \in \mathbb{N}$, puis $n = q - m$. Remarquons qu'on a aussi $n \in \mathbb{N}$ car $n = q + u_q - p$, donc $n \geqslant q + u_q - u_{q+1}$. Or, clairement par construction, $u_{q+1} = u_q + q$ donc $n \geqslant 0$. On a donc alors que $p = m + u_q = m + u_{n+m}$, comme voulu.

□

Cette propriété a pour conséquence que tout produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Corollaire 0.6. *Si E_1 et E_2 sont deux ensembles dénombrables, alors $E_1 \times E_2$ est un ensemble dénombrable. Plus généralement, si E_1, E_2, $\ldots E_n$ sont n ensembles dénombrables ($n \geqslant 2$), alors $E_1 \times E_2 \ldots \times E_n$ est dénombrable.*

Démonstration. Pour le cas $n = 2$, il suffit essentiellement de se ramener à la dénombrabilité de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de la manière suivante : on sait que E_1 et E_2 sont dénombrables, soient donc φ_i ($i = 1, 2$) une bijection de E_i vers $\mathbb{N}$. Alors l'application $\varphi : (e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 \mapsto (\varphi_1(e_1), \varphi_2(e_2)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est clairement une bijection de $E_1 \times E_2$ vers $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Soit ψ une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ (elle existe par la Proposition 0.5). Alors l'application $\psi \circ \varphi$ est bien définie de $E_1 \times E_2$ vers $\mathbb{N}$ et est une bijection, comme composée de bijections.

Le cas n quelconque est complètement évident, en utilisant un raisonnement par récurrence.

□

Corollaire 0.7. $\mathbb{Q}$ *est dénombrable.*

Démonstration. Soit $f : (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mapsto \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Par définition de $\mathbb{Q}$, f est surjective. De plus, $\mathbb{Z}$ est dénombrable par l'Exemple 0.2, $\mathbb{N}^*$ est dénombrable comme sous-ensemble infini de l'ensemble $\mathbb{N}$ et application de la Proposition 0.1. On applique alors le Corollaire 0.6, qui nous dit donc que $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable. Par la Proposition 0.3, on en déduit que $\mathbb{Q}$ est fini ou dénombrable. Mais $\mathbb{Q}$ n'est pas de cardinal fini (il contient $\mathbb{N}$), il est donc dénombrable. $\square$

Corollaire 0.8. *Soit E un ensemble (dénombrable ou non) et E_1, E_2, ...une collection finie ou dénombrable de sous-ensembles finis ou dénombrables de E. Alors $E_1 \cup E_2 \ldots$ est fini ou dénombrable.*

Remarque 0.2. Bien sûr, il faut comprendre qu'une réunion finie de sous-ensembles finis sera finie, une réunion finie d'ensembles dénombrables sera dénombrable, une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables sera dénombrable. Par contre, on ne sait pas si une réunion dénombrable d'ensembles fini est finie ou dénombrable (par exemple, si les E_i sont tous égaux, la réunion sera finie, si les E_i sont tous disjoints deux à deux, la réunion sera dénombrable).

Démonstration. Nous n'allons traiter que le cas où il y a une infinité dénombrable de sous-ensembles, la preuve étant similaire (et un peu plus simple) dans le cas d'un nombre fini d'ensembles.

On pose $X = \cup_{i \in I} E_i$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on introduit une application φ_i de $\mathbb{N}$ vers E_i qui soit surjective (si E_i est fini, il suffit par exemple d'écrire $E_i = \{x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots x_{i,n_i}\}$, où $n_i = \text{Card}(E_i)$, et de poser $\varphi_i(j) = x_{i,j+1}$ pour $0 \leqslant j < n_i$ et $\varphi(j) = x_{i,n_i}$ pour $j \geqslant n_i$, et si E_i est dénombrable, par définition on peut même prendre φ_i bijective). On pose alors l'application $f : (i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \mapsto \varphi_i(j) \in X$. Cette application est clairement surjective : si $x \in X$, alors il existe un $i_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = x_{i_0,n_{i_0}}$. Puisque chacune des φ_i est surjective, φ_{i_0} et surjective, il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi_{i_0}(j) = x_{i_0} = x$, donc $x = f(i_0, j)$. $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ étant dénombrable par les Propositions 0.1 et 0.5, on en déduit en appliquant la Proposition 0.3 que X est fini ou dénombrable. $\square$

Nous avons donc à notre disposition beaucoup d'ensembles dénombrables, et tout un tas de manière de construire de nouveaux ensembles dénombrables à partir d'ensembles dénombrables connus. Une question naturelle est donc de savoir s'il existe des ensembles non dénombrables. La réponse est oui.

Théorème 0.9. $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Démonstration. Nous allons donner ici la preuve originelle de Cantor, qui repose sur ce qui est appelé *l'argument diagonal de Cantor.* Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathbb{R}$ est dénombrable. Alors, par la Proposition 0.1, $[0,1[$ est aussi dénombrable. On écrit donc $[0,1[= \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, où les x_n sont distincts. Soit alors $x_n \in [0,1[$ quelconque. On peut alors écrire de manière unique x_n comme

$$x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{k,n}}{10^k},$$

où $(a_{k,n})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'entiers qui n'est pas stationnaire à 9 (c'est exactement ce qu'on appelle le développement décimal propre). On construit alors un $x \in [0,1[$ de la manière suivante :

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k},$$

où $b_k = 0$ si $a_{k,k} \neq 0$, et $b_k = 1$ si $a_{k,k} = 0$ (cette construction donne bien un développement décimal propre, puisque la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ne stationne pas à 9). Or, il existe un certain indice $i \in \mathbb{N}$ tel que $x = x_i$. On a alors nécessairement que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par unicité du développement décimal propre, $b_k = a_{k,i}$. Notamment, $b_i = a_{i,i}$, ce qui est impossible par construction. $\square$

Remarque 0.3. Une preuve relativement similaire donnerait qu'aucun intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point n'est dénombrable.

1 Espaces métriques et espaces vectoriels normés

1.1 Définition et exemples

La notion d'espace métrique vise à généraliser la notion de “distance” entre deux points, telle qu'elle est définie à l'aide par exemple de la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou de la distance euclidienne entre deux points (*i.e.* la longueur du segment reliant ces deux points) dans $\mathbb{R}^2$

Définition 1.1. Soit X un ensemble non vide. Une *distance* (ou *métrique*) sur X est une application

$$\mathrm{d} : X \times X \to [0, +\infty[, \tag{1.1}$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

1. (Séparation) Pour tout $x, y \in X$, on a $\mathrm{d}(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.
2. (Symétrie) Pour tout $x, y \in X$, on a $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$.
3. (Inégalité triangulaire) Pour tout $x, y, z \in X$, on a

$$\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z). \tag{1.2}$$

La couple (X, d), où X est un ensemble non vide et d une distance sur X, est appelé un *espace métrique*. De plus, on dit que $\mathrm{d}(x, y)$ est la *distance* entre les points x et y.

Remarque 1.1. Par définition, une distance doit satisfaire $\mathrm{d}(x, y) < +\infty$ pour tout $x, y \in X$.

Remarque 1.2. Comme on le verra dans la suite, il pourra arriver que l'on munisse un même ensemble non vide X de différentes distances. Pour éviter de les confondre, on pourra donc être amené à indexer ces différentes distances. Par exemple, si X est muni de deux distances d_1 et d_2 distinctes, même si l'espace de départ X est le même, il conviendra de ne pas confondre (X, d_1) et (X, d_2) en tant qu'espaces métriques.

On peut déduire des axiomes d'un espace métrique l'inégalité très importante suivante.

Proposition 1.1 (Inégalité triangulaire inversée)**.** *Soit* (X, d) *un espace métrique. Pour tout* $x, y, z \in X$*, on a*

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y). \tag{1.3}$$

.

Démonstration. De l'inégalité triangulaire $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$, on déduit que $d(x,z) - d(y,z) \leqslant d(x,y)$. Maintenant, de l'inégalité triangulaire $d(y,z) \leqslant d(y,x) + d(x,z)$, on tire en utilisant la symétrie que $d(y,z) - d(x,z) \leqslant d(y,x) = d(x,y)$. On a donc bien l'inégalité (1.3) (car $|d(x,z) - d(y,z)|$ vaut soit $d(x,z) - d(y,z)$, soit $d(y,z) - d(x,z)$). $\square$

1.1.1 Deux exemples fondamentaux

Comme expliqué en introduction, la notion de distance est censée généraliser la notion usuelle de distance entre deux points dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$. Il convient donc de vérifier que ces espaces, munis de leur distance usuelle, sont des espaces métriques au sens de la Définition 1.1.

Exemple 1.1 (Métrique standard sur $\mathbb{R}$)**.** On considère l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et on pose $\mathrm{d_s}(a,b) = |a-b|$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. Il est clair que $\mathrm{d_s} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,+\infty[$. De plus, $\mathrm{d_s}$ vérifie trivialement les propriétés de séparation et de symétrie. Finalement, l'inégalité triangulaire est une conséquence du fait que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a $|a+b| \leq |a| + |b|$. En effet, ceci implique que pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{d_s}(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z| = \mathrm{d_s}(x,y) + \mathrm{d_s}(y,z). \qquad (1.4)$$

Donc, $\mathrm{d_s}$ est une distance sur $\mathbb{R}$ et $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$ est un espace métrique. la distance $\mathrm{d_s}$ est appelée *distance standard* sur $\mathbb{R}$. Si jamais on considère l'espace métrique $\mathbb{R}$ sans préciser de quelle distance on le munit, cela signifiera implicitement qu'on le munit de la distance standard.

Exemple 1.2 (Métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^2$)**.** On considère le plan $\mathbb{R}^2$, et on pose

$$\mathrm{d}_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

pour tout $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ (le choix de la notation d_2 sera justifié ultérieurement). Il est clair que $\mathrm{d}_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to [0,+\infty[$. De plus, d_2 vérifie trivialement les propriétés de séparation et de symétrie. Il nous reste donc à démontrer l'inégalité triangulaire. Soient donc $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in \mathbb{R}^2$. On doit démontrer que

$$d_2((x_1,y_1),(x_3,y_3)) \leq d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + d_2((x_2,y_2),(x_3,y_3)). \qquad (1.5)$$

Pour ce faire, nous allons effectuer un petit calcul intermédiaire, qui utilise le théorème de Pythagore de manière intelligente. Considérons deux vecteurs $u = (u_1,u_2)$ et $v = (v_1,v_2)$ de $\mathbb{R}^2$, avec v supposé non nul. On rappelle que la norme euclidienne de u est donnée par $||u||^2 = u_1^2 + u_2^2$ (idem avec v ou n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^2$) et que le produit scalaire de u et v, noté $\langle u,v\rangle$, est donné par $\langle u,v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2$. Comme v est non nul, on peut poser $\lambda = \frac{\langle u,v\rangle}{||v||^2}$. On remarque alors que λv et $u - \lambda v$ sont orthogonaux. En effet,

$$\langle \lambda v, u - \lambda v\rangle = \lambda\langle v,u\rangle - \lambda^2||v||^2 = \frac{\langle u,v\rangle^2}{||v||^2} - \frac{\langle u,v\rangle^2}{||v||^4}||v||^2 = 0.$$

Par le théorème de Pythagore, on a donc $||\lambda v||^2 + ||u - \lambda v||^2 = ||u - \lambda v + \lambda v||^2 = ||u||^2$. Notamment, $||u||^2 \geqslant ||\lambda v||^2 = \frac{\langle u,v\rangle^2}{||v||^2}$, qui se réécrit donc en passant à la racine carré de chaque côté

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant ||u||\,||v||. \tag{1.6}$$

De plus, cette inégalité reste trivialement vraie si v est le vecteur nul, chacun des deux membres étant nuls.

Revenons donc maintenant à la démonstration de (1.5). En revenant à la définition de d_2 et en passant au carré, on voit que (1.5) est équivalent (car les membres de gauche et de droite dans (1.5) sont positifs) à

$$(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2 \le \left(\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}\right)^2. \tag{1.7}$$

Posons $u = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ et $v = (x_2 - x_3, y_2 - y_3)$. alors $u - v = (x_1 - x_3, y_1 - y_3)$ et on a alors, en utilisant (1.6),

$$\begin{aligned}(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2 &= ||u-v||^2\\ &= ||u||^2+||v||^2-2\langle u,v\rangle\\ &\leqslant ||u||^2+||v||^2+2|\langle u,v\rangle|\\ &\leqslant ||u||^2+||v||^2+2||u||\,||v||\\ &\leqslant (||u||+||v||)^2\\ &= \left(\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}\right)^2.\end{aligned}$$

C'est exactement l'inégalité (1.7), qui est équivalente à l'inégalité voulue (1.5).

La distance d_2 est appelée *distance euclidienne* sur $\mathbb{R}^2$.

1.1.2 Autres exemples d'espaces métriques

Un fait remarquable est que tout ensemble non vide X admet une métrique, dite triviale ou discrète.

Exemple 1.3 (Métrique discrète)**.** Soit X un ensemble non vide. La *métrique discrète* sur X est définie par

$$\mathrm{d}_{\mathrm{discr}}(x,y) = \begin{cases}0 & \text{si } x = y,\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{1.8}$$

Il s'agit bien d'une distance. En effet, $\mathrm{d}_{\mathrm{discr}}$ vérifie trivialement les propriétés de séparation et de symétrie. L'inégalité triangulaire est aussi facile à démontrer : si $x, y, z \in X$, on distingue alors trois cas :

— Si $x = y = z$, alors $d(x,z) = 0 \leqslant 0 + 0 = d(x,y) + d(x,z)$.

— Si $x = y$ et $z \neq x$ (et donc $z \neq y$), alors $d(x,z) = 1 \leqslant 0 + 1 = d(x,y) + d(x,z)$. Même chose pour les cas où $x = z$ et $y \neq x$ et si $y = z$ et $x \neq z$.

— Si x, y et z sont tous distincts, $d(x,z) = 1 \leqslant 1 + 1 = d(x,y) + d(y,z)$.

Donnons un autre exemple, qui illustre que pour le même ensemble, il peut exister beaucoup de distances différentes.

Exemple 1.4 (α-métriques sur $\mathbb{R}$)**.** On considère la ligne réelle $\mathbb{R}$. Pour $\alpha \in]0,1]$, on définit $\mathrm{d}_\alpha : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,+\infty[$ par

$$\mathrm{d}_\alpha(x,y) = |x-y|^\alpha, \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

Bien sur, $\mathrm{d}_1 = d_{\mathrm{s}}$ de l'Exemple 1.1. Les propriété de séparation et de symétrie sont clairement vérifiées. Donc, pour vérifier que d_α est une métrique, il suffit de montrer l'inégalité triangulaire.

En posant $a = x-y$ et $b = y-z$, ceci revient à montrer que pour tout $a, b > 0$ on a $(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$. Or la fonction $f(t) = t^\alpha$ est une fonction concave [1] sur $\mathbb{R}^+$, pour $\alpha \in]0,1]$. En effet, sur $\mathbb{R}^{+*}$, f est deux fois dérivable et $f''(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} \leqslant 0$. f est donc concave sur $\mathbb{R}^+$ et on se convainc aisément que rajouter 0 ne change pas grand chose. On pose λ tel que $a = (1-\lambda)(a+b)$, autrement dit $\lambda = \frac{b}{a+b} \in [0,1]$. Il est immédiat que $b = \lambda(a+b)$. En utilisant la concavité de f, on obtient

$$a^\alpha = f(a) = f(\lambda\cdot 0 + (1-\lambda)(a+b)) \geq (1-\lambda)(a+b)^\alpha, \tag{1.10}$$
$$b^\alpha = f(b) = f(\lambda(a+b) + (1-\lambda)\cdot 0) \geq \lambda(a+b)^\alpha. \tag{1.11}$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient le résultat voulu.

On vérifiera à titre d'exercice que si $\alpha > 1$, alors l'application d_α n'est pas une métrique.

Avant de rentrer plus en détail dans les questions de topologie, on peut à se stade donner quelques définitions et constructions complémentaires.

1.1.3 Construction d'espaces métriques

Une question relativement naturelle est la suivante : étant donné un ou plusieurs espaces métriques supposés connus, peut-on créer de “nouveaux” espaces métriques ? Nous allons voir deux manières de le faire, une par “restriction” à un sous-ensemble, et une par “extension”, au sens ici du produit.

Définition 1.2 (Sous-espace métrique)**.** Soit (X,d) un espace métrique et $Y \subset X$ une partie non vide. On note $\mathrm{d}_{|Y} : Y\times Y \to [0,+\infty[$ la restriction de d à $Y\times Y$. On vérifie aisément que $\mathrm{d}_{|Y}$ est une distance sur Y, appelée distance *induite* sur Y. L'espace métrique $(Y,\mathrm{d}_{|Y})$ est appelé un *sous-espace métrique* de (X,d). Quand il n'y a pas de risques de confusion, on s'autorisera l'abus de notation qui consiste à écrire (Y,d) à la place de $(Y,\mathrm{d}_{|Y})$.

Définition 1.3 (Espace métrique produit)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $(X_i,\mathrm{d}_i)_{i\in[|1,n|]}$ une collection de n espaces métriques. On pose $X = X_1 \times X_2 \ldots \times X_n$. Pour $x = (x_1,\ldots x_n), y = (y_1,\ldots y_n) \in X$, on pose

$$\mathrm{d}(x,y) = \max_{i\in[|1,n|]} d_i(x_i,y_i).$$

1. *i.e.* telle que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ pour tout $x,y > 0$ et $\lambda \in [0,1]$.

Alors (X, d) est un espace métrique. d est appelée la *distance produit* sur X

Dans la définition précédente, le fait que $\mathrm{d} : X \times X \to [0, +\infty[$ est évident. Les propriétés de séparation est de symétrie le sont aussi. Enfin, l'inégalité triangulaire est aussi vérifiée. En effet, considérons $x = (x_1, \dots x_n), y = (y_1, \dots y_n), z = (z_1, \dots, z_n) \in X$. Prenons $i_0 \in [|1, n|]$ tel que $d(x, z) = d_{i_0}(x_{i_0}, z_{i_0})$ (un tel i_0 existe par définition du maximum). En appliquant l'inégalité triangulaire à la distance d_{i_0}, on obtient alors, en utlisant la définition du maximum,

$$d(x, z) \leqslant d_{i_0}(x_{i_0}, y_{i_0}) + d_{i_0}(y_{i_0}, z_{i_0}) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

Remarque 1.3. Le choix d'utiliser le maximum dans la définition de la métrique produit peut sembler arbitraire (on aurait plus tout à fait prendre une somme, ou beaucoup d'autres choses, tant que les axiomes d'une distance sont vérifiés). En un certain sens, ce choix est bien arbitraire, mais prendre par exemple la somme ne changerait pas grand chose pour les chapitres qui suivent. On reviendra là-dessus quand on introduira la notion de métriques équivalentes.

1.1.4 Distance d'un point à une partie, distance entre deux parties, diamètre, ensemble borné

Si (X, d) est un espace métrique, on a déjà vu comment donner un sens à la distance entre deux points. On peut généraliser cette notion à des ensembles.

Définition 1.4. Soit (X, d) un espace métrique, x un élément de x et A une partie non vide de X. On appelle distance de x à A, notée $\mathrm{d}(x, A)$, la quantité

$$\mathrm{d}(x, A) = \inf_{a \in A} \mathrm{d}(x, a) (\geqslant 0).$$

Soit B une autre partie non vide de X. On appelle distance de A à B la quantité

$$\mathrm{d}(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \mathrm{d}(a, b) (= \inf_{a \in A} \mathrm{d}(a, B) = \inf_{b \in B} \mathrm{d}(b, A)) (\geqslant 0).$$

Remarque 1.4. On peut alors réécrire $\mathrm{d}(x, A)$ comme étant $\mathrm{d}(\{x\}, A)$.

Une remarque triviale est la suivante.

Proposition 1.2. *Si $A \subset B$ ou $B \subset A$, alors $\mathrm{d}(A, B) = 0$. Notamment, si $x \in A$, alors $d(x, A) = 0$.*

Démonstration. Supposons par exemple que $A \subset B$. Soit $a \in A$. Alors $a \in B$ et $\mathrm{d}(a, b) = 0$. Or $0 \leqslant \mathrm{d}(A, B) \leqslant \mathrm{d}(a, a) = 0$ donc $\mathrm{d}(A, B) = 0$. Par symétrie, on traite de la même manière le cas $B \subset A$, et on utilise la Remarque 1.4 pour traiter $\mathrm{d}(x, A)$. $\square$

Attention, la réciproque de la proposition 1.2 est fausse.

Exemple 1.5. On se place dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_s)$. On pose $x = 0$ et $A =]0, 1]$. Alors $x \notin A$, mais pourtant $d(x, A) = 0$. En effet, si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $1/n \in A$ et par définition de $\mathrm{d}_s(x, A)$, on a $0 \leqslant \mathrm{d}_s(x, A) \leqslant \mathrm{d}_s(x, 1/n) = 1/n$. Or $1/n \to 0$ quand $n \to \infty$. On a donc bien $d(x, A) = 0$.

Remarque 1.5. Il est clair que l'application $d : \mathcal{P}(E) \setminus \{0\} \times P(E) \setminus \{0\} \ \to \mathbb{R}^+$ vérifie l'axiome de symétrie. Il ne s'agit toutefois pas d'une distance puisque les deux autres axiomes ne sont pas forcément vérifiée. Pour l'axiome de séparation, si l'on reprend l'Exemple 1.5, on a exhibé deux ensembles distincts $\{x\}$ et A tels que $\mathrm{d}(\{x\}, A) = 0$. On verra en exercice une manière de définir une distance sur les ensembles. Pour l'inégalité triangulaire, on peut par exemple, dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_s)$, poser $A = [0, 1]$, $B = [2, 3]$, et $C = [4, 5]$. Alors $\mathrm{d}(A, C) = 3$, $\mathrm{d}(A, B) = 1$, et $\mathrm{d}(B, C) = 1$, donc $\mathrm{d}(A, C) > \mathrm{d}(A, B) + \mathrm{d}(B, C)$.

Définition 1.5. Soit (X, d) un espace métrique. Le diamètre d'une partie non vide $A \subset X$ est la quantité

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x_1, x_2 \in A} \mathrm{d}(x_1, x_2) \in [0, +\infty]. \tag{1.12}$$

Une partie A de X est dite *bornée* si $A = \emptyset$ ou si $\operatorname{diam} A < +\infty$.

Remarque 1.6. Evidemment, le diamètre d'un singleton est toujours 0 (donc tout espace métrique contient forcément des parties bornées), et le diamètre d'une partie ayant au moins deux éléments est forcément strictement positif.

Remarque 1.7. Il peut exister des parties bornées ou non bornées dans un espace métrique quelconque. Par exemple, dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_s)$, on vérifie aisément que $\operatorname{diam}(\mathbb{R}) = +\infty$ alors que $\operatorname{diam}([0, 1]) = 1$.

De manière assez évidente, on a la propriété suivante.

Proposition 1.3. *Soit* (X, d) *un espace métrique,* $B \subset A$ *deux parties non vides de* X*. Alors* $\operatorname{diam} B \leqslant \operatorname{diam} A$*. Notamment, si* A *est bornée, alors* B *est bornée.*

Démonstration. C'est évident par définition du diamètre : comme $B \subset A$, un sup sur les éléments de B est forcément inférieur à un sup sur les éléments de A :

$$\operatorname{diam} B = \sup_{x_1, x_2 \in B} \mathrm{d}(x_1, x_2) \leqslant \sup_{x_1, x_2 \in A} \mathrm{d}(x_1, x_2) = \operatorname{diam} A.$$

□

Voici une propriété utile sur les des parties bornées.

Proposition 1.4. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $A_1, \ldots A_n$ *un nombre fini de parties bornée. Alors* $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ *est bornée.*

Remarque 1.8. Bien sûr, la propriété devient en général fausse si on prend un nombre infini de parties bornées (prendre par exemple, dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_s)$, $A_n = \{n\}$ qui est une partie de diamètre 0 donc bornée, mais $\bigcup A_n = \mathbb{N}$, qui n'est pas borné car $d(0, n) = n \to \infty$ quand $n \to \infty$).

Démonstration. On se convainc qu'il suffit de traiter le cas $n = 2$, une récurrence immédiate permettant de traiter le cas général. Soient donc A et B deux parties bornées non vide (l'énoncé étant trivial si A ou B est vide). Soient $(x_1, x_2) \in A \cup B$. On a alors deux possibilités :

— Soient x_1 et x_2 sont dans A, dans ce cas $d(x_1, x_2) \leqslant \operatorname{diam}(A)$, soient x_1 et x_2 sont dans B, dans ce cas $d(x_1, x_2) \leqslant \operatorname{diam}(B)$.

— Soit l'un est dans A et l'autre dans B, par exemple, $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ (le cas $x_1 \in B$ et $x_2 \in A$ se traite de la même manière en échangeant les rôles de x_1 et x_2). On se donne alors deux points fixés $a_1 \in A_1$ et $a_2 \in A_2$. On a alors

$$d(x_1, x_2) \leqslant d(x_1, a_1) + d(a_1, a_2) + d(a_2, x_2) \leqslant \operatorname{diam}(A) + d(a, b) + \operatorname{diam}(B).$$

En résumé, si on prend le sup sur tous les $x_1, x_2 \in A_1 \cap A_2$, on a bien que $\operatorname{diam}(A_1, A_2) < \infty$ et

$$\operatorname{diam}(A_1, A_2) \leqslant \operatorname{diam}(A) + d(a, b) + \operatorname{diam}(B).$$

□

1.2 Espaces vectoriels normés

Une classe très importante d'espaces métriques est obtenue en introduisant la notion de norme pour un espace vectoriel. Dans ce cours on considérera seulement des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Selon que l'on se place sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $|\cdot|$ désignera donc la valeur absolue ou le module.

1.2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.6. Soit E un espace $\mathbb{K}$-vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Une *norme* pour E est une application

$$\mathfrak{n} : E \to [0, +\infty), \tag{1.13}$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

1. (Séparation) : Pour tout $v \in E$, on a $\mathfrak{n}(v) = 0 \Rightarrow v = 0_E$;
2. (Homogénéité) : Pour tout $v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $\mathfrak{n}(\lambda v) = |\lambda| \mathfrak{n}(v)$;
3. (Sous-additivité, ou inégalité triangulaire) : Pour tout $v, w \in E$ on a $\mathfrak{n}(v + w) \leq \mathfrak{n}(v) + \mathfrak{n}(w)$.

La couple $(E, \mathfrak{n})$ est dite un *espace vectoriel normé* (evn). Aussi, on note souvent $\mathfrak{n}(v) = \|v\|$ ou $\mathfrak{n}(v) = \|v\|_E$.

Remarque 1.9. En prenant $\lambda = 0$ dans la propriété d'homogénéité, on voit que $\mathfrak{n}(0_E) = 0$.

Remarque 1.10. On peut interpréter une norme comme une notion de longueur pour les vecteurs de E. Ainsi, la positivité nous dit que le seul vecteur de longueur 0 est le vecteur nul et l'homogénéité nous garantit que cette longueur est compatible avec la structure d'espace vectoriel.

Tout les *evn* ont une structure métrique canoniquement associée.

Théorème 1.5 (Métrique associé à une norme)**.** *Soit* $(E, \mathfrak{n})$ *un evn. L'application* $\mathrm{d}_{\mathfrak{n}} : E \times E \to [0, +\infty)$ *définie par*

$$\mathrm{d}_{\mathfrak{n}}(x, y) = \mathfrak{n}(x - y), \qquad \forall x, y \in E, \tag{1.14}$$

est une métrique, dite métrique canoniquement associée à la norme $\mathfrak{n}$*.*

Démonstration. La séparation de $\mathfrak{n}$ implique immédiatement la séparation de $\mathrm{d}_{\mathfrak{n}}$. Ainsi, par homogénéité de $\mathfrak{n}$, on a

$$\mathrm{d}_{\mathfrak{n}}(x, y) = \mathfrak{n}(x - y) = \mathfrak{n}(-(y - x)) = \mathfrak{n}(y - x) = \mathrm{d}_{\mathfrak{n}}(y, x), \tag{1.15}$$

et donc $\mathrm{d}_{\mathfrak{n}}$ est symétrique. Finalement, grace à l'inégalité triangulaire pour $\mathfrak{n}$, on a que pour tout $x, y, z \in E$, on a

$$\mathrm{d}_{\mathfrak{n}}(x, z) = \mathfrak{n}(x - z) = \mathfrak{n}((x - y) + (y - z)) \leqslant \mathfrak{n}(x - y) + \mathfrak{n}(y - z) = \mathrm{d}_{\mathfrak{n}}(x, y) + \mathrm{d}_{\mathfrak{n}}(y, z).$$

□

Remarque 1.11. Attention, toute métrique sur un espace vectoriel normé n'est pas nécessairement issue d'une norme (autrement dit, la propriété d'être un evn est strictement plus forte que d'être un espace métrique). La distance standard sur $\mathbb{R}$, introduite dans l'Exemple 1.1, est associée à la norme $\mathfrak{n}(v) = |v|$ pour $v \in \mathbb{R}$. Toutefois, si $\alpha < 1$, les α-métriques de l'Exemple 1.4 ne sont associées à aucune norme. En effet, si $d_\alpha(x, y) = \mathfrak{n}(x - y)$ on aurait

$$\mathfrak{n}(\lambda v) = \mathrm{d}_\alpha(\lambda v, 0) = |\lambda v|^\alpha = |\lambda|^\alpha d_\alpha(v, 0) = |\lambda|^\alpha \mathfrak{n}(v), \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},\, v \in \mathbb{R}, \tag{1.16}$$

ce qui contredirait l'homogénéité de $\mathfrak{n}$ en prenant par exemple $\lambda = 2$.

Pour conclure, on dispose aussi d'une inégalité triangulaire inversée pour les normes.

Proposition 1.6 (Inégalité triangulaire inversée pour les normes)**.** *Soit* $(E, \mathfrak{n})$ *un espace vectoriel normé. Pour tout* $x, y \in E$*, on a*

$$|\mathfrak{n}(x) - \mathfrak{n}(y)| \leqslant \mathfrak{n}(x - y). \tag{1.17}$$

.

Démonstration. On applique l'inégalité triangulaire inversée (1.3) à $\mathrm{d}_{\mathfrak{n}}$ et $z = 0$. On a alors $|\mathfrak{n}(x) - \mathfrak{n}(y)| = |\mathrm{d}_{\mathfrak{n}}(x, 0) - \mathrm{d}_{\mathfrak{n}}(y, 0)| \leqslant \mathrm{d}_{\mathfrak{n}}(x, y) = \mathfrak{n}(x - y)$. □

1.2.2 Exemples d'evn

Un des points clefs de ce cours est de saisir les différences entre les espaces vectoriels de dimension finie et ceux de dimension infinie. En particulier, on est intéressé à comprendre jusqu'à où les intuitions que l'on pense être vraies en dimension finie s'étendent à la dimension infinie.

Espaces de dimension finie : les p-normes

Soit E un evn tel que $\dim E = n < +\infty$. Nous commençons par montrer qu'il existe toujours un isomorphisme entre E et $\mathbb{K}^n$.

En effet, nous pouvons fixer une *base* de E, noée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Ceci nous permet de définir l'application suivante :

$$\Phi : \mathbb{K}^n \to E, x = (x_1, \ldots x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i. \tag{1.18}$$

Cette application est trivialement linéaire. De plus, elle est injective, car $\mathcal{B}$ est libre : si $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0$, alors pour tout $i \in [|1, n|]$, on a $x_i = 0$, donc $x = 0$ et $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$. Elle est surjective, car $\mathcal{B}$ est génératrice : si $e \in E$, alors il existe $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $e = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, ce qui signifie exactement que $\Phi(x) = e$.

Donc Φ est un isomorphisme entre E et $\mathbb{K}^n$.

Dans la suite nous supposons fixée une base, et donc nous identifierons E avec $\mathbb{K}^n$.

Définition 1.7. Soit $p \in [1, +\infty]$. La *p-norme* sur $\mathbb{K}^n$ est l'application $\| \cdot \|_p : \mathbb{K}^n \to [0, +\infty)$ définie, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, par :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \text{si } p < +\infty, \qquad \text{et} \qquad \|x\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|. \tag{1.19}$$

Le point crucial est le suivant.

Théorème 1.7. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'application $\| \cdot \|_p$ est une norme.*

Démonstration. Si $\|x\|_p = 0$, comme $|x_i| \geq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a que $x_i = 0$ et donc $x = 0$. Ceci prouve la séparation.

Pour prouver l'homogénéité, on fixe $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^n$, et on calcule, pour $p < +\infty$,

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda|^p |x_i|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \|x\|_p. \tag{1.20}$$

Le cas $p = +\infty$ est similaire.

Le point plus délicat est l'inégalité triangulaire. Dans le cas $p = +\infty$, on a

$$\|x + y\|_\infty \leq \max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(|x_i| + |y_i| \big) \leq \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i| + \max_{i \in [\![1,n]\!]} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \tag{1.21}$$

Dans le cas $p = 1$, on a facilement en utilisant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$ que

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1. \tag{1.22}$$

Le cas $p \in]1, +\infty[$ est plus compliqué et est démontré dans le Lemme 1.9.

Pour montrer l'inégalité triangulaire, on a besoin du résultat suivant.

Lemma 1.8 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $1/p + 1/q = 1$. Alors,*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}^n. \tag{1.23}$$

Démonstration. Nous commençons par montrer l'inégalité de Young pour les produits :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad \forall a, b > 0. \tag{1.24}$$

À cet effet, on pose $\lambda = 1/p$ (et donc $1 - \lambda = 1/q$). Par concavité du logarithme, on a

$$\log\left(\lambda a^p + (1-\lambda) b^q\right) \geq \lambda \log(a^p) + (1-\lambda)\log(b^q) = \log a + \log b = \log(ab). \tag{1.25}$$

Par monotonie de la fonction exponentielle, ceci prouve l'inégalité de Young.

On cherche maintenant à prouver (1.23). Si $\|x\|_p = 0$ alors $x = 0$ et donc l'inégalité est satisfaite. De même, le résultat est vrai si $\|y\|_q = 0$. On peut donc supposer que $\|x\|_p, \|y\|_q \neq 0$. De plus, en remplaçant x par $x/\|x\|_p$ et y par $y/\|y\|_q$ on voit qu'on peut aussi supposer $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. En utilisant (1.24), on a donc

$$|x_i||y_i| \leq \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q}, \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \tag{1.26}$$

En sommant sur $i \in \{1, \dots, n\}$, on a donc

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq \frac{\|x\|_p^p}{p} + \frac{\|y\|_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{1.27}$$

ce qui prouve l'énoncé. □

Lemma 1.9 (Inégalité de Minkowski)**.** *Soit $p \in [1, +\infty)$. Alors,*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}^n. \tag{1.28}$$

Démonstration. En utilisant le fait que $|a + b| \leq |a| + |b|$, on a

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_p^p &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \big(|x_i| + |y_i|\big) \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

On va maintenant appliquer l'inégalité de Hölder (1.23). À cet effet, on observe que $q = (p-1)/p$ satisfait $1/p + 1/q = 1$. Donc

$$\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{i=1}^{n} \left(|x_i + y_i|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} = (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x+y\|_p^{p-1}. \tag{1.30}$$

L'énoncé suit en remarquant qu'il est trivial si $\|x+y\|_p = 0$, et en divisant par $\|x+y\|_p^{p-1}$ sinon. $\square$

$\square$

Espaces de dimension infinie

Dans la suite, on va considérer trois espaces et introduire des normes sur eux.

L'espace des polynômes On rappelle qu'un polynôme réel $P \in \mathbb{K}[X]$ est une fonction $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ vérifiant

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad \forall x \in \mathbb{K}. \tag{1.31}$$

Le degré de P est défini par

$$\deg P = \min \{m \in \mathbb{N} \mid a_i = 0 \, \forall i > m\}. \tag{1.32}$$

On montre aisément que l'espace $\mathbb{K}_N[x]$ des polynômes de degré inférieur où égal à un entier fixé $N \in \mathbb{N}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^{N+1}$, à travers l'isomorphisme

$$\Phi : P \mapsto (a_0, \ldots, a_N) \in \mathbb{K}^{N+1}. \tag{1.33}$$

En adaptant les preuves faites pour le cas de dimension finie, on peut donc démontrer facilement qu'on a les normes suivantes.

Définition 1.8. Soit $p \in [1, +\infty]$. La p-norme sur $\mathbb{K}[X]$ est l'application $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}[X] \to [0, +\infty)$ définie, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$ tels que $P(x) = \sum_{i=0}^{\deg P} a_i x^i$, par :

$$\|P\|_p = \left(\sum_{i=0}^{\deg P} |a_i|^p \right)^{1/p}, \quad \text{si } p < +\infty, \qquad \text{et} \qquad \|P\|_\infty = \max_{i \in [\![0, \deg P]\!]} |a_i|. \tag{1.34}$$

L'espace des fonctions continues On note

$$C([0,1], \mathbb{K}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{K} \mid f \text{ est continue}\}. \tag{1.35}$$

Si l'on écrit $C([0,1])$, cela sous-entendra toujours que l'on regarde les fonctions à valeurs réelles. Ceci est un espace vectoriel : si on pose pour $f, g \in C([0,1], \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$ et $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$. En particulier, le vecteur nul est la fonction nulle $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. On étend aisément à cet espace aussi la notion de p-norme.

Définition 1.9. Soit $p \in [1, +\infty]$. La p-norme sur $C([0,1], \mathbb{K})$ est l'application $\|\cdot\|_p : C([0,1], \mathbb{K}) \to [0, +\infty)$ définie, pour tout $f \in C([0,1], \mathbb{K})$, par

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \quad \text{si } p < +\infty, \qquad \|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|. \tag{1.36}$$

On peut montrer que $(C([0,1], \mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ est un evn pour tout $p \in [1, +\infty]$ (*c.f.* Exercice 1.10).

Espaces des suites

Définition 1.10. Soit $p \in [1, +\infty]$. On considère l'application $\| \cdot \|_p : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to [0, +\infty]$ définie par

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \text{si } p < +\infty, \qquad \text{et} \qquad \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \max_{i \in [\![1,+\infty]\!]} |x_i|. \tag{1.37}$$

L'espace $\ell^p(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est le sous- ensemble de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ défini par

$$\ell^p(\mathbb{K}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p < +\infty \right\}. \tag{1.38}$$

On peut montrer que $(\ell^p(\mathbb{K}), \| \cdot \|_p)$ est un evn pour tout $p \in [1, +\infty]$ (*c.f.* Exercice 1.11).

1.3 Exercices

Exercice 1.1. (*) Montrer que pour $\alpha > 1$, la fonction d_α définie dans l'Exemple 1.4 n'est pas une métrique.

Exercice 1.2. (*) [Métrique induite] Soient X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. Supposons qu'il existe une injection $f : X \to Y$. Montrer que l'on induire une métrique d_f sur X comme suit :

$$\mathrm{d}_f(a, b) = \mathrm{d}(f(a), f(b)), \qquad \forall a, b \in X. \tag{1.39}$$

Exercice 1.3. (**)[Distance SNCF] Soit $X = \mathbb{R}^2$. Pour tout $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$\mathrm{d}_{SNCF}(x, y) = \begin{cases} \mathrm{d}_2(x, y) \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires,} \\ \mathrm{d}_2(x, (0,0)) + d_2((0,0), y) \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que (X, d_{SNCF}) est un espace métrique.
2. On pose $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$. Calculer $\mathrm{diam}(B)$ pour d_2 et d_{SNCF}.
3. On pose $C = \{x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 < -2\}$. Calculer $d_2(B, C)$ et $d_{SNCF}(B, C)$.

Exercice 1.4. (*) Quel est le diamètre d'une boule ouverte ou fermée dans un evn ?

Exercice 1.5. (**) Soit $X =]0, +\infty[$. On pose $d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$.

1. Montrer que (X, d) est un espace métrique.
2. Caractériser l'ensemble des parties bornées et l'ensemble des parties non bornées de (X, d).

Exercice 1.6. (***) [Espace de Baire] On considère l'espace des suites à valeurs entières :

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{N}\} . \tag{1.40}$$

La *métrique de Baire* sur cet espace est $\mathrm{d_B} : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to [0, +\infty)$ définie par

$$\mathrm{d_B}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \\ 2^{-\min\{m\in\mathbb{N} \mid x_m \neq y_m\}} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.41}$$

1. Si on considère les suites $x = (1, 1, 1, \ldots)$ et $y = (1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, \ldots)$, calculer $\mathrm{d_B}(x, y)$.
2. Montrer que pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors

$$\mathrm{d_B}(x, z) \leq \max\{\mathrm{d_B}(x, y), \mathrm{d_B}(y, z)\} . \tag{1.42}$$

3. En déduire que d_B est une distance sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Remarque. Une métrique qui satisfait (1.42) est dite *ultramétrique.*

Exercice 1.7. (**) Soit (X, d) un espace métrique.

1. Montrer que $\sigma = \frac{d}{1+d}$ est une distance sur X.
2. Calculer $\mathrm{diam}(X)$. Que dire de toute partie de (X, σ) ?

Exercice 1.8. (*)[Fonctions bornées] Soit (Y, d_Y) un espace métrique. Soit X un ensemble et considérons l'ensemble

$$\mathcal{B}(X, Y) = \{f : X \to Y \mid \mathrm{diam}(f(X)) < +\infty\} . \tag{1.43}$$

Montrer que l'application $\mathrm{d}_\infty(f, g) = \sup_{x\in X} \mathrm{d}_Y(f(x), g(x))$, $f, g \in \mathcal{B}(X, Y)$ est une métrique sur $\mathcal{B}(X, Y)$.

Exercice 1.9. (**)[Produit dénombrable d'espaces métriques] Soit $(X_i, \mathrm{d}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une collection dénombrable d'espaces métriques. On pose $X = \prod_{i=1}^{+\infty} X_i$ (produit non commutatif ordonné par ordre croissant). Pour $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}, y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, on pose $\mathrm{d}(x, y) = \sup_{i\in\mathbb{N}^*} \frac{d_i(x_i,y_i)}{(1+d_i(x_i,y_i))2^i}$. Montrer que (X, d) est un espace métrique.

Exercice 1.10. (**) On considère l'espace $C([0, 1], \mathbb{K})$ ainsi que les p-normes introduites en cours.

1. Démontrer la séparation et l'homogénéité positive.
2. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont des normes.
3. On suppose maintenant que $p \in]1, \infty[$. Soit $q \in]1, +\infty[$ tel que $1/p + 1/q = 1$. En repartant de l'inégalité de Young (1.24), démontrer l'inégalité de Hölder pour les intégrales : si $f, g \in C([0, 1], \mathbb{K})$, alors

$$\int_0^1 |f|\,|g| \leq \|f\|_p \|g\|_q, \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}^n. \tag{1.44}$$

4. En déduire que $|\cdot|_p$ est une norme.

Exercice 1.11. (**) On considère $(\ell^p(\mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$, pour $p \in [1, +\infty]$.

1. Montrer que $\ell^\infty(\mathbb{K})$ et $\ell^1(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, puis que $(\ell^\infty(\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ et $(\ell^1(\mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$ sont des evn .
2. On considère maintenant le cas $p \in]1, +\infty[$. En utilisant à bon escient l'inégalité (1.28), montrer que $\ell^p(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, puis que $(\ell^p(\mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ est un evn .

Exercice 1.12. (*) Montrer que toute norme sur $\mathbb{R}$ est de la forme $\mathfrak{n}(x) = \gamma|x|$ pour $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 1.13. (***)

1. On considère, pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathfrak{n}(P) = \max_{x\in[0,1]} |P(x)|$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{K}[X]$.
2. Soit A une partie de $\mathbb{K}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $\sup_{x\in A} |P(x)|$ soit une norme sur $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 1.14. (**) Soit $N : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer qu'en réalité, N est exactement la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.15. (*)[Fonctions bornées] Soit (Y, d_Y) un espace métrique. Soit X un ensemble et considérons l'ensemble

$$\mathcal{B}(X, Y) = \{f : X \to Y \mid \mathrm{diam}(f(X)) < +\infty\}. \tag{1.45}$$

Montrer que l'application $\mathrm{d}_\infty(f, g) = \sup_{x\in X} \mathrm{d}_Y(f(x), g(x))$, $f, g \in \mathcal{B}(X, Y)$ est une métrique sur $\mathcal{B}(X, Y)$. Montrer aussi que, si $Y = \mathbb{R}$ et $\mathrm{d}_Y = \mathrm{d}_s$, alors $\mathcal{B}(X, Y)$ est un espace vectoriel et d_∞ est associée à une norme.

Exercice 1.16. (*) Étant donné un intervalle fermé $I \subset \mathbb{R}$ (ce qui comprend le cas $I = \mathbb{R}$), considérons l'espace

$$C^1(I) = \left\{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue, dérivable et } f' \text{ continue}\right\}. \tag{1.46}$$

1. Démontrer que $C^1(I)$ est un espace vectoriel.
2. Démontrer qu'en posant

$$\mathfrak{n}(f) = |f(0)| + \int_I |f'(t)|\, dt, \qquad f \in C^1(I), \tag{1.47}$$

   on définit une norme sur $C^1(I)$ si $I = [a, b]$ avec $-\infty < a \leq 0 \leq b < +\infty$. Est-ce que le même résultat est vrai si $I = \mathbb{R}$?
3. Définit-on une norme sur $C^1(\mathbb{R})$ en posant

$$\mathfrak{n}(f) = |f(0)| + \sup_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)|, \qquad \forall f \in C^1(I) \qquad ? \tag{1.48}$$

2 Topologie des espaces métriques et des evn

Dans tout ce chapitre, on suppose fixé un espace métrique (X, d).

2.1 Ensembles ouverts et fermés

Grace à la notion de distance, on peut identifier les ensembles de points qui sont “proches” d'un point donné.

Définition 2.1. Soit $x \in X$ et $r > 0$. La *boule ouverte de rayon r et centre x* est l'ensemble

$$B(x,r) = \{y \in X \mid \mathrm{d}(x,y) < r\}\,. \tag{2.1}$$

La *boule fermée de rayon r et centre x* est l'ensemble

$$\bar{B}(x,r) = \{y \in X \mid \mathrm{d}(x,y) \leq r\}\,. \tag{2.2}$$

La *sphère de rayon r et centre x* est l'ensemble

$$S(x,r) = \{y \in X \mid \mathrm{d}(x,y) = r\}\,. \tag{2.3}$$

Remarque 2.1. Une première remarque immédiate (mais très utile) est que $B(x,r) \subset \bar{B}(x,r)$, et que si $r < r'$, alors $B(x,r) \subset B(x,r')$ et $\bar{B}(x,r) \subset \bar{B}(x,r')$.

Exemple 2.1 (Boules dans $\mathbb{R}$)**.** On considère $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$ où $\mathrm{d_s}$ est la distance standard donnée par la valeur absolue (voir Exemple 1.1). Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, on a

$$B(x,r) =]x-r, x+r[\qquad \text{et} \qquad \bar{B}(x,r) = [x-r, x+r]. \tag{2.4}$$

i.e., les boules ouvertes (resp. fermées) correspondent aux intervalles ouverts (resp. fermés).

Exemple 2.2 (Boules dans le plan)**.** On va décrire les boules ouvertes de rayon $r > 0$ et centre $z_0 = (x_0, y_0)$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne. Dans ce cas, on a

$$B(z_0, r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r\}. \tag{2.5}$$

Donc, la boule correspond à l'intérieur du cercle de centre z_0 et rayon r, privé de sa frontière.

Si on s'intéresse aux boules fermés, il suffira (dans ce cas particulier, cela ne sera pas toujours le cas) de rajouter la “frontière” aux boules ouvertes.

Le prochain exemple montre qu'on doit faire très attention avec la notion de boule : Même si on les appelle "boules" elle n'ont rien de rond ; de plus, il peux y avoir une différence énorme entre la boule fermé et la boule ouverte de même centre et rayon, comme il peut n'y avoir aucune différence. Dans le même ordre d'idées, deux boules de rayon différents peuvent être égales.

Exemple 2.3 (Boules pour la distance discrète)**.** Soit X un ensemble quelconque, avec la métrique discrète introduite dans l'Exemple 1.3. Pour $x \in X$ on a donc :

$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } r \leq 1, \\ X & \text{si } r > 1, \end{cases} \qquad \bar{B}(x,r) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } r < 1, \\ X & \text{si } r \geq 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

En particulier, $B(x,1) = \{x\}$ tandis que $\bar{B}(x,1) = X$; $B(x,1/2) = \bar{B}(x,1/2)$, et $B(x,1/2) = B(x,1/4) = \{x\}$.

Grâce à la notion de boule, on peut introduire la notion d'ensemble ouvert ou fermé.

Définition 2.2. Soit A une partie de X. On dit que
- $x \in X$ est un *point intérieur* à A s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$;
- A est *ouvert* si tout $a \in A$ est intérieur à A, autrement dit, si pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset A$.
- A est *fermé* si $X \setminus A$ est ouvert.

Par cohérence avec la dénomination choisie, il est important de vérifier la chose suivante.

Proposition 2.1. *Toute boule ouverte est une partie ouverte de X. Toute boule fermée est une partie fermée de X.*

Démonstration. Soit $y \in X$ et $R > 0$. Soit $x \in B(y,R)$. On cherche $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset B(y,R)$. Autrement dit, on cherche $r > 0$ tel que pour tout $z \in X$ vérifiant $d(x,z) < r$, on ait $d(y,z) < R$. Soit donc $z \in X$. Par l'inégalité triangulaire, on a $d(y,z) \leqslant d(y,x)+d(x,z)$. De plus, comme $x \in B(y,R)$, on a $d(x,y) < R$. On choisit donc $r = R - d(x,y) > 0$. Si $z \in B(x,r)$, on a alors bien $d(y,z) < d(y,x) + (R - d(y,x)) = R$, donc $z \in B(y,R)$ et $B(x,r) \subset B(y,R)$.

Maintenant, pour montrer que $\bar{B}(y,R)$ est fermé, il faut montrer que $X \setminus \bar{B}(y,R)$ est ouvert. Soit donc $x \in X \setminus \bar{B}(y,R)$. Par définition, cela signifie que $d(x,y) > R$. On procède alors un peu de la manière "inverse" qu'au raisonnement précédent : si $z \in B(x,r)$ avec $r > 0$ à choisir, on a par l'inégalité triangulaire inversée (1.3) $d(z,y) \geqslant |d(x,y) - d(z,x)|$, notamment $d(z,y) > d(x,y) - r$. Comme $d(x,y) > R$, on peut poser $r = d(x,y) - R > 0$, alors on a $d(z,y) > d(x,y) - (d(x,y) - R) = R$. Donc $z \in X \setminus B(y,r)$.

□

Exemple 2.4 (Ouverts pour la métrique discrète)**.** Soit $(X, \mathrm{d}_{\mathrm{discr}})$ un espace métrique muni de la distance discrète. Alors, toute partie de X est ouverte. En effet, si $A \subset X$, tout $x \in A$ est intérieur, car $B(x,1/2) = \{x\} \subset A$. Toute partie A de X est aussi fermée, puisque son complémentaire $X \setminus A$ est aussi une partie de A, qui est donc ouverte. Il peut donc exister des parties non vides strictes de X qui soient en même temps ouvertes et fermées (on reviendra là-dessus dans le chapitre sur la connexité).

Exemple 2.5 (Ouverts de $\mathbb{R}$)**.** D'après l'Exemple 2.1, la description très simple des boules ouvertes dans le cas de $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$ permet de montrer aisément que tous les intervalles ouverts $]a, b[\subset \mathbb{R}$ sont ouverts et que tout les intervalles fermés $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sont fermés. De plus, les ouverts dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$ sont complètement caractérisés comme les réunions dénombrables d'intervalles ouverts (voir Exercice 2.2).

Les propriétés suivantes sont essentielles.

Proposition 2.2 (Propriétés des ouverts)**.** *Soit* (X, d) *un espace métrique. Alors :*

i. *X et $\varnothing$ sont ouverts ;*

ii. *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont ouverts, alors $\bigcap_{i=1}^n A_i$ est ouvert ;*

iii. *Soit I un ensemble quelconque d'indices. Si $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille d'ouvert, alors $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ est ouvert.*

Démonstration. Le premier point est une conséquence immédiate de la définition.

Pour montrer le deuxième point, on considère $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ouverts de X, et $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$. Comme $x \in A_1$, il existe $r_1 > 0$ tel que $B(x, r_1) \subset A_1$. De même, comme $x \in A_2$, il existe aussi $r_2 > 0$ tel que $B(x, r_2) \subset A_2$. Et ainsi de suite : pour tout $i \in [|1, n|]$, il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset A_i$. On pose alors $r = \min\{r_1, r_2, \ldots r_n\}$. En utilisant la remarque 2.1, on a donc que pour tout $i \in [|1, n|]$, on a $B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset A_i$, *i.e.* $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$, ce qui démontre que x est un point intérieur, et donc que $\bigcap_{i=1}^n A_i$ est ouvert.

Pour terminer, on montre le dernier point. Soit $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ et montrons que c'est un point intérieur. Par définition de la réunion, il existe $\bar{\alpha}$ tel que $x \in A_{\bar{\alpha}}$. Comme $A_{\bar{\alpha}}$ est ouvert, il existe $r > 0$ tel que

$$B(x, r) \subset A_{\bar{\alpha}} \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha. \tag{2.7}$$

□

Donc x est bien intérieur à $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, qui est donc un ouvert.

Remarque 2.2. L'intersection d'une infinité d'ensemble ouverts n'est pas forcément ouverte. Il suffit de considérer $A_n = (0, 1 + 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. On voit facilement que chaque A_n est ouvert, toutefois on a

$$A_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n =]0, 1]. \tag{2.8}$$

Or, A_∞ n'est pas ouvert, car $1 \in A_\infty$ n'est pas un point intérieur. En effet, pour $r > 0$ on a $B(1, r) =]1 - r, 1 + r[\not\subset A_\infty$.

En passant aux complémentaires dans la Proposition 2.2, on obtient les propriétés correspondants pour les fermés.

Proposition 2.3 (Propriétés des fermés)**.** *Soit* (X, d) *un espace métrique. Alors :*

i. X *et* $\varnothing$ *sont fermés ;*

ii. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont fermés, alors* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *est fermé ;*

iii. Soit I *un ensemble quelconque d'indices. Si* $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ *est une famille de fermés, alors* $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ *est fermé.*

2.2 Intérieur, adhérence, frontière

On commence par introduire une notion qui simplifiera beaucoup les énoncés suivants.

Définition 2.3. Soit (X, d) un espace métrique et $x \in X$. On dit que une partie $V \subset X$ est un *voisinage de* x s'il existe un ouvert $O \subset V$ tel que $x \in O$, ou, de manière équivalente, s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset V$.

Par exemple, $[0, 2]$ est un voisinage de 1 dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$. Par contre $[1, 2]$ ne l'est pas.

L'énoncé suivant est une conséquence directe des définitions et du fait que les boules ouvertes sont ouvertes.

Proposition 2.4. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $A \subset X$ *une de ses parties. Alors,* $x \in A$ *est un point intérieur à* A *si et seulement si* A *est un voisinage de* x*. De plus,* A *est ouvert si et seulement s'il est voisinage de chacun de ses points.*

Définition 2.4. Soit $A \subset X$. L'*intérieur de* A, noté $\mathring{A}$ ou $\mathrm{Int}(A)$, est le plus grand (au sens de l'inclusion) ensemble ouvert inclus dans A. Notamment, $\mathring{A} \subset A$.

Remarque 2.3. L'intérieur de A existe, il suffit de prendre la réunion de l'ensemble des ouverts inclus dans A, qui est lui-même un ouvert par le troisième point de la Proposition 2.2.

Exemple 2.6. Dans $(\mathbb{R}, d_s)$, si $a < b$, l'intérieur d'un intervalle de la forme $]a, b[$ ou $[a, b]$ ou $[a, b[$ ou $]a, b]$ est $]a, b[$. En effet, $]a, b[$ est ouvert en temps que boule ouverte, et c'est bien le plus grand possible puisqu'un éventuel point du bord de l'intervalle n'est pas intérieur (par exemple, a n'est pas intérieur à $[a, b[$ puisque pour tout $r > 0$, $B(a, r) =]a - r, a + r[\not\subset [a, b[$).

Proposition 2.5. *Soit* A *une partie de* X*. Alors,* $\mathring{A}$ *est l'ensemble des points intérieurs à* A*. En particulier,* A *est ouvert si et seulement si* $A = \mathring{A}$*.*

Démonstration. Notons $J \subset A$ l'ensemble des points intérieurs de A. Comme $\mathring{A} \subset A$ est ouvert par définition, A est voisinage de tout ses points et donc, par la Proposition 2.4, on a $\mathring{A} \subset J$.

Puisque $J \subset A$, par définition de $\mathring{A}$ (qui est le plus grand ouvert inclus dans A), il nous suffit maintenant de montrer que J est ouvert pour être sûr que $J \subset \mathring{A}$. Grâce à la Proposition 2.4, pour tout $x \in J$, il existe un ouvert $O_x \subset A$ tel que $x \in O_x$. Comme O_x est ouvert, on a que A est un voisinage de chacun des points de O_x, et donc O_x est constitué des points intérieurs. En particulier, $O_x \subset J$, qui est donc ouvert. $\square$

Une notion duale à celle d'intérieur est la suivante.

Définition 2.5. Soit $A \subset X$. L'*adhérence de* A, noté $\bar{A}$ ou $\mathrm{Ad}(A)$, est le plus petit ensemble fermé qui contient A. Notamment, $A \subset \bar{A}$.

Remarque 2.4. L'adhérence de A existe, il suffit de prendre l'intersection de l'ensemble des fermés contenant A, qui est lui-même un fermé par le troisième point de la Proposition 2.3.

Il y a un lien entre l'adhérence et l'intérieur, qui est le suivant.

Proposition 2.6. *Soit $A \subset X$. Alors :*

i. $\overline{X \setminus A} = X \setminus \mathring{A}$, *autrement dit, en passant au complémentaire,* $\mathring{A} = X \setminus (\overline{X \setminus A})$.

ii. $X \overset{\circ}{\setminus} A = X \setminus \bar{A}$, *autrement dit, en passant au complémentaire,* $\bar{A} = X \setminus (X \overset{\circ}{\setminus} A)$.

Démonstration. Pour le premier point, on va procéder par double inclusion. Comme $\mathring{A}$ est un ouvert inclus dans A, $X \setminus \mathring{A}$ est fermé contenant $X \setminus A$. Par définition de l'adhérence, on a donc $\overline{X \setminus A} \subset X \setminus \mathring{A}$. Inversement, comme $\overline{X \setminus A}$ est un fermé qui contient $X \setminus A$, $X \setminus (\overline{X \setminus A})$ est un ouvert inclus dans A. Par définition de l'intérieur, on a donc $X \setminus (\overline{X \setminus A}) \subset \mathring{A}$, et donc en passant au complémentaire (qui inverse les inclusions), on a $X \setminus \mathring{A} \subset \overline{X \setminus A}$.

Le deuxième point se déduit du premier point tout simplement en changeant A en $X \setminus A$ et en changeant $X \setminus A$ en A (puisque le premier point est vérifié pour toutes les parties de X).

$\square$

Pour caractériser l'adhérence, on pose la définition suivante (on se convaincra aisément que les équivalences sont vérifiées).

Définition 2.6. Soit $A \subset X$. Un point $x \in X$ est dit *adhérent* à A si pour tout voisinage V de x, on a $V \cap A \neq \varnothing$, ou, de manière équivalente, si pour tout ouvert O contenant x, on a $G \cap A \neq \varnothing$, ou de manière équivalente, si pour tout $\varepsilon > 0$, on a $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$, autrement dit, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) < \varepsilon$.

Proposition 2.7. *Soit A une partie de X. Alors, $\bar{A}$ est l'ensemble des points adhérents à A. De plus, A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.*

Démonstration. En utilisant la définition d'un point adhérent, on voit qu'un point $x \in X$ n'est pas adhérent à A si et seulement s'il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A = \varnothing$, *i.e.* tel que $V \subset X \setminus A$. Autrement dit, x n'est pas adhérent à A si et seulement si x est dans l'intérieur de $X \setminus A$. En prenant la contraposée, x est adhérent à A et seulement si $x \in X \setminus (X \overset{\circ}{\setminus} A)$, et donc si et seulement si $x \in \bar{A}$ par le deuxième point de la Proposition 2.6. $\square$

Définition 2.7. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. On appelle *frontière de* A l'ensemble

$$\mathrm{Fr}\, A = \bar{A} \setminus \mathring{A}. \tag{2.9}$$

Remarque 2.5. Fr A est toujours un fermé de X. Ceci découle du deuxième point de la Proposition (2.6) : Fr $A = \bar{A} \cap E \setminus \mathring{A} = \bar{A} \cap \overline{E \setminus A}$, et du deuxième point de la Proposition 2.3 qui dit qu'une intersection de fermés est fermée.

2.2.1 Métriques induites

Soit (X, d) un espace métrique, $Y \subset X$ et (Y, d) le sous-espace métrique pour la distance induite sur Y.

Proposition 2.8. *i. A est un ouvert de (Y, d) si et seulement s'il existe un ouvert O de (X, d) tel que $A = O \cap Y$.*

ii. $A \subset$ est un fermé de (Y, d) si et seulement s'il existe un fermé O de (X, d) tel que $A = O \cap Y$.

Démonstration. Par souci de clarté, on notera B_X dans X et B_Y une boule dans Y.

Pour le point *i.*, on commence par le sens direct : si A est un ouvert de (Y, d), alors, pour tout $x \in A$, il existe $r_x > 0$ tel que $B_Y(x, r_x) \subset A$. Alors, on remarque que $A = \bigcup_{x \in A} B_Y(x, r_x)$. Mais il est aisé de voir que $B_Y(x, r_x)$ n'est rien d'autre que $B_X(x, r_x) \cap Y$. On a donc le résultat voulu avec $O = \bigcup_{x \in A} B_X(x, r_x)$. Inversement, s'il existe un ouvert O de (X, d) tel que $A = O \cap Y$, alors, pour tout $x \in A$, il existe $r_x > 0$ tel que $B_X(x, r_x) \subset O$. On a donc $B_X(x, r_x) \cap Y \subset O \cap Y = A$. En utilisant encore une fois que $B_Y(x, r_x) = B_X(x, r_x) \cap Y$, on a donc $B_Y(x, r_x) \subset A$, et donc A est bien ouvert dans Y.

Le point *ii.* se déduit du point *i.* par passage au complémentaire. En effet, A est fermé dans (Y, d) si et seulement si $Y \setminus A$ est un ouvert de (Y, d), si et seulement s'il existe un ouvert O de X tel que $Y \setminus A = O \cap Y$. En passant au complémentaire, on obtient donc que tout ceci est équivalent à $A = Y \setminus (O \cap Y) = (Y \setminus O) \cup (Y \setminus Y) = (Y \setminus O) = (X \setminus O) \cap Y$. $X \setminus O$ étant un fermé de X puisque O est ouvert, on en déduit le résultat voulu. □

On conclut cette section en calculant adhérence et intérieur des boules, dans le cas particulier d'un evn .

Proposition 2.9. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn . Alors, pour tout $x \in E$ et $r > 0$ on a*

$$\bar{B}(x, r) = \mathrm{Ad}\,(B(x, r)) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Int}\left(\bar{B}(x, r)\right) = B(x, r). \tag{2.10}$$

Remarque 2.6. Comme on l'a déjà vu précédemment, ces propriétés sont fausses en général dans le cadre des espaces métriques qui ne sont pas des evn .

Remarque 2.7. On appelle en général boule unité la boule $B(0, 1)$.

Démonstration. On ne démontrera que la première assertion, car la seconde se démontre exactement sur le même principe. Par définition on a que $B(x, r) \subset \bar{B}(x, r)$ et donc, par définition de l'adhérence, on a déjà que $\mathrm{Ad}(B(x, r)) \subset \mathrm{Ad}(\bar{B}(x, r)) = \bar{B}(x, r)$.

Il reste donc à montrer que $\bar{B}(x, r) \subset \mathrm{Ad}(B(x, r))$. Comme c'est évident que si $y \in B(x, r)$ alors $y \in \mathrm{Ad}(B(x, r))$, on se réduit à devoir montrer que si $y \in \bar{B}(x, r) \setminus B(x, r)$ on a $y \in \mathrm{Ad}(B(x, r))$.

Soit donc y tel que $\|x-y\| = r$. Par définition d'un point adhérent, pour montrer que $y \in \mathrm{Ad}(B(x,r))$, il suffit de prouver que pour tous $\rho > 0$ on a $B(x,r) \cap B(y,\rho) \neq \varnothing$. En effet, soit $\lambda \in (0,1)$ et $p_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)y$. D'une part $p_\lambda \in B(x,r)$ car :

$$\|p_\lambda - x\| = (1-\lambda)\|y-x\| = (1-\lambda)r < r. \tag{2.11}$$

D'autre part, $\|p_\lambda - y\| = \lambda\|x-y\| = \lambda r$. Or, si l'on choisit λ suffisamment petit, tel que $\lambda r < \rho$ (i.e., $0 < \lambda < \min\{1, \rho/r\}$) on a $p_\lambda \in B(y,\rho)$. Ceci conclut la démonstration. □

2.3 Comparaison de métriques et de normes

Dans cette section on considère deux distances d_1 et d_2 définies sur l'ensemble X.

2.3.1 Comparaisons topologiques

Définition 2.8. On dit que d_2 est une métrique topologiquement plus fine que d_1 si et seulement si toute partie ouverte pour d_1 est ouverte pour d_2.

On dit que d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes si et seulement si d_2 est topologiquement plus fine que d_1 et d_1 et que d_1 est topologiquement plus fine que d_2.

On dit que d_1 et d_2 ne sont pas topologiquement comparables si et seulement si d_1 n'est pas plus topologiquement plus fine que d_2 et d_2 n'est pas topologiquement plus fine que d_1.

Remarque 2.8. En d'autres termes, d_2 est topologiquement plus fine que d_1 si et seulement si elle a plus d'ouverts que. d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes ouverts. d_1 est d_2 ne sont pas topologiquement comparables si et seulement s'il existe des ouverts pour d_1 qui ne sont pas des ouverts pour d_2, et inversement.

On verra en exercice que toutes les situations peuvent arriver. Donnons toutefois déjà un premier exemple.

Exemple 2.7. Soit $\mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_\mathrm{s}$ la distance standard sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{d}_2 = \mathrm{d}_{\mathrm{discr}}$ la distance discrète introduite dans l'Exemple 1.3. Par l'Exemple 2.4, tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est un ouvert pour d_2. Par contre, il existe des ensemble non ouverts sur $\mathbb{R}$ pour d_1 (par exemple les singletons, les intervalles fermés, les réunions finies d'intervalles fermés, ...).

Un exemple très simple d'équivalence topologique est donné par les espaces métriques finis.

Proposition 2.10. *Soit X un ensemble fini. Alors, toute distance est topologiquement équivalente à la distance discrète.*

Démonstration. Soit d une distance sur X. Montrons que tout partie de X est ouverte par rapport à d, ce qui implique l'énoncé grace à l'Exemple 2.4. Par la troisième propriété de la Proposition 2.2, il suffit de montrer que les singletons sont ouverts, auquel cas n'importe quelle partie (qui pourra s'écrire comme une union quelconque de singletons) sera ouverte.

Comme X est fini, l'ensemble $\mathfrak{X} = \{\mathrm{d}(x,y) \mid x, y \in X,\, x \neq y\}$ est fini et ne contient pas 0. Donc, si on pose $r_0 := \min \mathfrak{X}$ on a $r_0 > 0$. En particulier, ceci implique que $B(x, r_0/2) = \{x\}$ pour tout $x \in X$ et donc que les singletons sont ouverts. $\square$

2.3.2 Comparaisons métriques

Définition 2.9. Soient d_1 et d_2 deux métriques sur X. On dit que d_2 est métriquement plus fine que d_1 si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$, on ait $d_1(x,y) \leqslant C d_2(x,y)$.

On dit que d_1 et d_2 sont métriquement équivalentes si et seulement si d_2 est métriquement plus fine que d_1 et d_1 et que d_1 est métriquement plus fine que d_2.

On dit que d_1 et d_2 ne sont pas métriquement comparables si et seulement si d_1 n'est pas plus fine métriquement que d_2 et d_2 n'est pas plus fine métriquement que d_1.

On peut comparer cette notion avec celle introduite précédemment.

Proposition 2.11. *Si d_2 est métriquement plus fine que d_1, alors d_2 est topologiquement plus fine que d_1. Par conséquent, si d_1 et d_2 sont métriquement équivalentes, alors elles sont topologiquement équivalentes.*

Démonstration. Le point crucial est le suivant : si d_2 est métriquement plus fine que d_1, alors chaque boule pour la distance d_2 contient une boule pour la distance d_1. Plus précisément, soit $C > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$, on ait $d_1(x,y) \leqslant C d_2(x,y)$. Soit $x \in X$, $r > 0$ et $y \in B_2(x,r)$ (boule pour la distance d_2). Alors $d_1(x,y) \leqslant C d_2(x,y) < Cr$. Donc, par définition, $y \in B_1(x, Cr)$ (boule pour la distance d_1). Ainsi, on a montré que $B_2(x,r) \subset B_1(x,Cr)$.

Ceci suffit pour montrer que tout ouvert O pour d_1 est un ouvert pour d_2. En effet, si $x \in O$, alors il existe $r > 0$ tel que $B_1(x,r) \subset O$. En appliquant le point démontré précédemment en remplaçant r par r/C, on a $B_2(x, r/C) \subset B_1(x,r) \subset O$. Donc x est un point intérieur pour d_2, et O est bien un ouvert pour d_2. Pour les distances équivalentes, il suffit d'appliquer le point précédent à d_1 et d_2 puis échanger le rôle de d_1 et d_2. $\square$

Toutefois, il est possible que deux distances soient topologiquement équivalentes sans être métriquement équivalentes, comme on le verra en exercice.

Enfin, dans le cadre des evn , on peut simplifier un peu ces questions de comparaisons métriques.

Proposition 2.12. *Soit E un evn muni de deux normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ de distances canoniquement associées d_1 et d_2. Alors d_2 est métriquement plus fine que d_1 si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $||x||_2 \leqslant C||x||_1$. Dans ce cas, on dit que la norme $||\cdot||_2$ est plus fine que la norme $||\cdot||_1$.*

Démonstration. C'est assez évident : si d_2 est métriquement plus fine que d_1, il suffit d'appliquer la définition avec $y = 0$ et remarquer que $\mathrm{d}_i(x,0) = ||x||_i$ $(i = 1,2)$. Inversement, s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $||x||_2 \leqslant C||x||_1$, en replaçant x

par $x-y$ et en remarquant que $\|x-y\|_i = \mathrm{d}_i(x,y)$ $(i=1,2)$, on obtient la définition du fait que d_2 soit métriquement plus fine que d_1. $\square$

De la même manière, on a les définitions suivantes.

Définition 2.10. On dit que les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ sont équivalentes si les distances associées sont équivalentes. On dit que les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ ne sont pas comparables si les distances associées ne sont pas comparables.

Remarque 2.9. Dans les exercices, quand on parlera de comparer (métriquement, topologiquement) des métriques ou comparer des normes, cela signifiera que se posera la question de savoir si certaines sont plus fines que d'autres, si elles sont équivalentes, ou si elles sont non comparables.

2.4 Exercices

Exercice 2.1. (*) Soit (X,d) un espace métrique. Soit A une partie de X. Montrer que A est bornée si et seulement si A est inclus dans une boule.

Remarque 2.10. Le résultat de l'exercice 2.1 est à connaître.

Exercice 2.2. (***) Considérons $(\mathbb{R},\mathrm{d_s})$. Montrer que $A\subset\mathbb{R}$ est ouvert si et seulement s'il est réunion d'une quantité dénombrable d'intervalles ouverts disjoints. On pourra utiliser que tout intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ contient un nombre rationnel.

Exercice 2.3. (**) Soit (X,d) un espace métrique, A et B deux sous-ensembles de X. Montrer les propriétés suivantes.

i. Si $A\subset B$, alors $\mathring{A}\subset\mathring{B}$ et $\bar{A}\subset\bar{B}$;
ii. $\overset{\circ}{\overbrace{A\cap B}} = \mathring{A}\cap\mathring{B}$;
iii. $\overline{A\cup B} = \bar{A}\cup\bar{B}$;
iv. $\mathring{A}\cup\mathring{B}\subset \overset{\circ}{\overbrace{A\cup B}}$, mais l'inclusion peut être stricte.
v. $\bar{A}\cap\bar{B}\subset\overline{A\cap B}$, mais l'inclusion peut être stricte.

Exercice 2.4. (*) Soit (X,d) un espace métrique. soit $x\in X$ et $r>0$. Montrer que $\overline{B(x,r)}\subset\bar{B}(x,r)$. A-t-on en général égalité ?

Exercice 2.5. (***) On se place dans $(\mathbb{R},\mathrm{d}_s)$. On considère une partie $A\subset\mathbb{R}$ telle que tout point de A est isolé : pour tout $a\in A$, il existe $\varepsilon_a>0$ tel que pour tout voisinage V de a, on $B(a,\varepsilon_a)=\{a\}$. En créant une injection entre A et $\mathbb{Q}$, montrer que A est fini ou dénombrable. On pourra utiliser que tout intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ contient un nombre rationnel.

Exercice 2.6. (**) Soit (X,d) un espace métrique. Soit O un ouvert de X et $B\subset E$. Montrer que $O\cap\bar{B}\subset\overline{O\cap B}$. A-t-on en général égalité ?

Exercice 2.7. (**) Calculer les boules ouvertes et fermées pour l'espace métrique défini dans l'Exercice 1.5.

Exercice 2.8. (*)Montrer que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est fermé pour $||\cdot||_2$.

Exercice 2.9. (**) Soient A et B deux ouverts de $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$. On suppose que $A \cap B = \emptyset$. Montrer que $\bar{A} \cap B = \emptyset$, mais en général $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$.

Exercice 2.10. (**) On se place dans $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer et dessiner les boules unité pour les normes $||\cdot||_1, ||\cdot||_2, ||\cdot||_\infty$.
2. Pour d_{SNCF} définie à l'exercice 1.3, calculer $B((0,0),1)$ et la comparer avec les boules précédentes.
3. Montrer qu'une partie est bornée pour d_{SNCF} si et seulement s'il est borné pour d_2. On pourra utiliser l'Exercice 2.1.

Exercice 2.11. (*) Pour les ensembles suivants, déterminer intérieur, adhérence, frontière, et dire s'ils sont ouverts, fermés, ou non :

1. Dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$:
$$\mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Q}, \qquad \left\{ m + \frac{1}{n} \mid m \in \mathbb{N},\, n \in \mathbb{N}^* \right\}. \tag{2.12}$$
2. Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$:
$$\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \qquad \{(x,y) \mid xy = 1\}, \qquad \{(x,y) \mid xy < 1\}. \tag{2.13}$$
3. Dans $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$:
$$\{f \in C([0,1]) \mid f \text{ est constante}\}, \qquad \{f \in C([0,1]) \mid f(1/2) = 1\}. \tag{2.14}$$

Exercice 2.12. (*) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn . Pour $x \in E$ et $r > 0$, calculer $Fr(B(x,r))$ et $Fr(\bar{B}(x,r))$.

Exercice 2.13. (**) Construire un ensemble E de $\mathbb{R}$ tels que les 5 ensembles suivants soient distincts :
$$E, \bar{E}, \mathring{E}, \mathring{\bar{E}}, \bar{\mathring{E}}.$$

Exercice 2.14. (*)Soit (X, d) un espace métrique et E une partie de E.

1. On suppose $E \neq X$. Montrer que $x \in E$ est intérieur à E si et seulement si $d(x, X \setminus E) > 0$.
2. Montrer que $x \in X$ est un point adhérent à E si et seulement si $d(x,E) = 0$.

Exercice 2.15. (**) Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Montrer que $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \bar{A}$.

Exercice 2.16. (**) Soit (X, d) un espace métrique. On pose $\sigma = \frac{d}{1+d}$. On a déjà vu à l'exercice 1.7 que σ était une distance sur X. Montrer que d et σ sont topologiquement équivalentes. Sont-elles en général métriquement équivalentes ?

Exercice 2.17. (**) On considère $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_\alpha)$ où $\mathrm{d}_\alpha(x,y) = |x-y|^\alpha$ est la distance introduite dans l'Exemple 1.4, pour $\alpha < 1$. On a déjà vu que d_s et d_α sont topologiquement équivalentes. Comparer métriquement ces distances.

Exercice 2.18. (**)

1. Dans $\mathbb{R}^n$, montrer que $|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.
2. En utilisant l'inégalité de Hölder (1.23), Montrer que $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont équivalentes pour tout $p, q \in [1, +\infty]$.

Exercice 2.19. (*) Comparer les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur l'espace des polynômes $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2.20. (*) Montrer que $\{0, y| - 1 < y < 1\}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}^2$ pour $\|\cdot\|_2$, mais qu'il est ouvert dans $\{0, y\}|y \in \mathbb{R}\}$ (muni de la distance induite).

Exercice 2.21. (*)Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn , A un ensemble ouvert de E et B un ensemble quelconque. On appelle $A + B = \{a + b|a \in A, b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est ouvert.

Exercice 2.22. (**)Soit $(E, ||\cdot||)$ un evn . Soit F un sous-espace vectoriel ouvert de E. Montrer que $F = E$.

3 Convergence et continuité

Dans ce chapitre, on introduit la notion de convergence et ses conséquences.

3.1 Convergence de suites

3.1.1 Définition

Définition 3.1. Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ est *convergente* si

$$\exists x_\infty \in X \quad \text{t.q.} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(x_n, x_\infty) = 0. \tag{3.1}$$

Dans ce cas on dit que la suite converge vers x_∞ et on note $x_n \longrightarrow x_\infty$ ou $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_\infty$.

Bien sûr, par définition de la limite des suite réelles, la définition précédente est équivalente à la caractérisation suivante :

$$\exists x_\infty \in X \quad \text{t.q.} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad \forall n \geq N, \text{ on ait } \mathrm{d}(x_n, x_\infty) \leq \varepsilon. \tag{3.2}$$

On dispose d'autres caractérisations de la limite.

Proposition 3.1 (Convergence topologique)**.** *Soient* (X, d) *un espace métrique et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* X*. Les énoncés suivants sont équivalents.*

i. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $x_\infty \in X$*.*

ii. Pour tout $\varepsilon > 0$*, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $x_n \in B(x_\infty, \varepsilon)$ *si* $n \geq N$*.*

iii. Pour tout voisinage U *de* x_∞*, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $x_n \in U$ *si* $n \geq N$*.*

Démonstration. i.⇒ ii. : c'est une conséquence immédiate de la définition de la limite. En effet, soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad \forall n \geq N$ on ait $\mathrm{d}(x_n, x_\infty) \leq \varepsilon$. Ceci signifie donc que pour $n \geqslant N$, $x_n \in B(x_\infty, \varepsilon)$.

ii.⇒ iii. : c'est immédiat aussi. En effet, soit U un voisinage de x_∞, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x_\infty, \varepsilon) \subset U$. Or, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(x_\infty, \varepsilon)$ si $n \geq N$, donc $x_n \in U$ pour $n \geq N$.

iii. ⇒ i. : on revient à la définition de la limite. Soit $\varepsilon > 0$. $B(x_\infty, \varepsilon)$ étant un voisinage de x_∞, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait $x_n \in B(x_\infty, \varepsilon)$, autrement dit $d(x_n, x_\infty) \leqslant \varepsilon$. □

3.1.2 Propriétés de la convergence

Les propriétés suivantes sont des conséquences de l'inégalité triangulaire et de la propriété de séparation.

Proposition 3.2 (Unicité de la limite)**.** *Soient* (X, d) *un espace métrique et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *une suite. Si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, alors sa limite est unique.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $x_\infty, y_\infty \in X$, $x_\infty \neq y_\infty$, tels que $x_n \longrightarrow x_\infty$ et $x_n \longrightarrow y_\infty$. Comme $\mathrm{d}(x_\infty, y_\infty) > 0$, par définition, il existe donc $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $\mathrm{d}(x_n, x_\infty) \leq \mathrm{d}(x_\infty, y_\infty)/4$ si $n \geq N_1$ et $\mathrm{d}(x_n, y_\infty) \leq \mathrm{d}(x_\infty, y_\infty)/4$ si $n \geq N_2$. En posant $N = \max\{N_1, N_2\}$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\mathrm{d}(x_\infty, y_\infty) \leq \mathrm{d}(x_n, x_\infty) + \mathrm{d}(x_n, y_\infty) \leq \frac{\mathrm{d}(x_\infty, y_\infty)}{4} + \frac{\mathrm{d}(x_\infty, y_\infty)}{4} = \frac{\mathrm{d}(x_\infty, y_\infty)}{2}. \tag{3.3}$$

Cela donne $\mathrm{d}(x_\infty, y_\infty) < \mathrm{d}(x_\infty, y_\infty)$ et donc l'absurdité qu'on cherchait. □

Une autre propriété des suites convergentes est qu'elle restent bornées.

Définition 3.2. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ est *bornée* si l'ensemble $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

On a donc la proposition suivante.

Proposition 3.3. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Toute suite convergente dans* X *est bornée.*

Démonstration. On va utiliser la caractérisation de l'exercice 2.1. On prend $\varepsilon = 1$ dans la définition de la convergence : il existe $x_\infty \in X$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait $x_n \in B(x_\infty, 1)$. On pose alors $r = \max_{n\in[|1,N-1|]} d(x_n, x_\infty)$, puis $R = \max(r, 1)$. Alors, il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in B(x_\infty, R)$, ce qui montre que la suite est bien bornée.

□

La dernière propriété de base de la convergence concerne les sous-suites. On rappelle cette notion.

Définition 3.3. Soit X un ensemble et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite. Une *suite extraite* (ou sous-suite) de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, où φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, appelée *extraction*.

Ce concept sera central dans la suite, on donne déjà une première propriété ici.

Proposition 3.4. *Toute suite extraite d'une suite convergente dans un espace métrique est convergente dans cet espace et de même limite.*

Démonstration. On se donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x_∞. Soit φ une extraction. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\forall n \geq N$, on ait $\mathrm{d}(x_n, x_\infty) \leq \varepsilon$. Le point crucial est de remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(n) \geqslant n$. Ceci se démontre facilement par récurrence : clairement $\varphi(0) \geqslant 0$, et si pour un certain n on a $\varphi(n) \geqslant n$, puisque φ est strictement croissante, on a $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$, autrement dit, puisque $\varphi(n+1)$ est entier, $\varphi(n+1) \geqslant n+1$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, on a $\varphi(n) \geqslant N$, et donc $d(x_{\varphi(n)}, x_\infty) \leqslant \varepsilon$, ce qui donne la propriété voulue.

□

Remarque 3.1. La proposition précédente est fortement utilisée pour démontrer qu'une suite n'est pas convergente. En effet, lorsque l'on souhaite montrer qu'une suite n'est pas convergente, une méthode fréquemment utilisée consiste à extraire deux sous-suites de la suite initiale, dont les limites sont différentes. C'est l'exemple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ définie par $u_n = (-1)^n$. Il suffit de considérer la sous-suite extraite en ne choisissant que les éléments de rang pair, puis la suite extraite construite en ne considérant que les éléments de rang impair.

Pour finir, étudions les suites convergentes pour la distance discrète.

Proposition 3.5. *Soit (X, d_{discr}) un ensemble. Une suite est convergente si et seulement si elle est stationnaire, au sens où elle est constante à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Pour le sens direct, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un certain $x \in X$, en prenant $\varepsilon = 1/2$ dans la définition de la limite, on a existence de $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow \mathrm{d}_{\mathrm{discr}}(x_n, x) \leqslant 1/2$. Par définition de la distance discrète, cela signifie bien que pour $n \geqslant N$, on a $x_n = x$. Le sens réciproque est vrai dans n'importe quel espace métrique (Y, d) : si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire, il existe un certain $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $x_n = x$, *i.e.* $\mathrm{d}(x_n, x) = 0$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, $n \geqslant N \Rightarrow \mathrm{d}(x_n, x) \leqslant \varepsilon$, d'où la convergence. □

3.2 Les notions topologiques à travers la convergence

Dans cette section, on va caractériser les notions topologiques introduites dans le Chapitre 2 à travers les suites.

Proposition 3.6 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence)**.** *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Alors, $a \in \bar{A}$ si et seulement si a est limite d'une suite d'éléments de A.*

Démonstration. Par la Proposition 2.7, on a que $a \in \bar{A}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, on a $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. En choisissant $\varepsilon = 1/(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$, cette propriété nous permet de construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ telle que $x_n \in B(a, 1/(n+1)) \cap A$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier,

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(x_n, a) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0. \tag{3.4}$$

Donc, $x_n \longrightarrow a$ et donc a est limite d'une suite d'éléments de A.

Supposons maintenant qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ telle que $x_n \longrightarrow a \in X$ et montrons que $a \in \bar{A}$. À cet effet, on fixe $\varepsilon > 0$ et on observe que par définition de la convergence, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(a,\varepsilon)$ pour tout $n \geq N$. Autrement dit $B(a,\varepsilon) \cap A \supset \{x_n \mid n \geq N\} \neq \varnothing$, et donc $a \in \bar{A}$. □

Proposition 3.7. *[Caractérisation séquentielle des fermés] Soit* (X, d) *un espace métrique et* $A \subset X$*. Alors,* A *est fermé si et seulement si*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \quad et \quad x_n \longrightarrow x_\infty \in X \implies x_\infty \in A. \tag{3.5}$$

Remarque 3.2. Cette propriété sera très souvent utilisée pour démontrer qu'un ensemble est fermé.

Démonstration. Si A est fermé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ est telle que $x_n \longrightarrow x_\infty \in X$, la caractérisation séquentielle de l'adhérence implique que $x_\infty \in \bar{A}$. Or, comme A est fermé, on a $A = \bar{A}$, et donc $x_\infty \in A$.

Supposons maintenant que la propriété (3.5) soit satisfaite et montrons que A est fermé. Comme $\bar{A} \supset A$, il nous suffit de montrer que $\bar{A} \subset A$. Soit $x \in \bar{A}$. Alors, encore une fois par caractérisation séquentielle de l'adhérence, x est limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$. On en déduit par (3.5) que $x \in A$. C'est ce que l'on voulait démontrer. □

Proposition 3.8 (Caractérisation séquentielle des points intérieurs)**.** *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $A \subset X$*. Alors,* $a \in \mathring{A}$ *si et seulement si*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \quad et \quad x_n \longrightarrow a \implies \exists N \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad x_n \in A, \quad \forall n \geq N. \tag{3.6}$$

Démonstration. Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ soit une suite convergente vers $a \in \mathring{A}$. Comme a est un point intérieur, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset A$. Par convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a donc qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(a,\varepsilon) \subset A$ pour $n \geq N$. Cela montre (3.6).

On prouve maintenant la deuxième implication par contraposée. On suppose que (3.6) n'est pas vérifiée pour un certain $a \in X$, *i.e.*, on suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ qui converge vers a mais telle que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geq N \quad \text{t.q.} \quad x_n \notin A. \tag{3.7}$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence, on a existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait $x_n \in B(a,\varepsilon)$. En appliquant la propriété (3.7), il existe donc un $n \geqslant N$ tel que $x_n \notin A$, donc la boule $B(a,\varepsilon)$ contient un élément $x_n \notin A$. Cela montre que $a \notin \mathring{A}$. □

Proposition 3.9 (Caractérisation séquentielle des ouverts)**.** *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $A \subset X$*. Alors,* A *est ouvert si et seulement si* (3.6) *est vérifié pour tout* $a \in A$*.*

3.2.1 Comparaisons topologiques et suites

Le concept de suite est fortement lié à la topologie associé à la distance. En effet on a le théorème suivant.

Théorème 3.10. *Soit X un ensemble et* d, d' *deux distances sur X.* d' *est plus fine que* d *si et seulement si toute suite convergente pour* d' *est aussi convergente pour* d*, vers la même limite. Notamment,* d *et* d' *sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles ont les même suites convergentes, où chaque suite convergente a la même limite pour les deux distances.*

Démonstration. Supposons que d' soit plus fine que d . Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X qui converge vers x_∞ par rapport à d'. Soit $U \subset X$ un voisinage par rapport à d de x_∞. Puisque tout ouvert pour d est aussi un ouvert pour d', U est aussi voisinage par rapport à d' de x_∞, et par la caractérisation séquentielle des ouverts, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq N$. Donc, par la Proposition 3.1, on a que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_∞ par rapport à d' aussi.

Supposons maintenant toute suite convergente pour d' est aussi convergente pour d, vers la même limite. Soit $U \subset X$ soit ouvert par rapport à d et montrons qu'il est aussi ouvert par rapport à d'. Ceci revient à montrer que $X \setminus U$ est fermé par rapport à d'. À cet effet, on utilisera la caractérisation séquentielle des fermés. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $X \setminus U$ qui est convergente par rapport à d', et donc à d, à $x_\infty \in X$. Comme $X \setminus U$ est fermé par rapport à d, on a que $x_\infty \in X \setminus U$, qui est donc fermé aussi par rapport à d'. $\square$

Remarque 3.3. L'Exemple 2.17 montre donc qu'il n'est pas nécessaire pour deux distances avec les mêmes suites convergentes d'être métriquement équivalentes.

Remarque 3.4. Attention, pour deux distances distinctes sur X, il se peut qu'il existe une suite qui admette deux limites différentes pour ces deux distances différentes. Les deux métriques ne sont alors pas topologiquement équivalentes. A titre d'exemple, on regarde $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_s)$ et $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_f)$, où $\mathrm{d}_f(x, y) = |f(x)-f(y)|$, avec f la fonction telle que $f(x) = x$ si $x \neq 0, 1$, $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$. f étant clairement injective, par l'Exercice 1.2, on sait que d_f est une distance sur $\mathbb{R}$.

On remarque alors que la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 pour d_s mais converge vers 1 pour d_f. On en déduit que $]1/2, 3/2[$, qui est ouvert pour d_s, n'est pas ouvert pour d_f. En effet, 1 n'est pas un point intérieur, par contraposition de la Proposition 3.6 : dès que $n \geqslant 2$, on a $1/n \notin]1/2, 3/2[$.

Inversement, $]-1, 1]$ n'est pas un ouvert pour d_s mais est un ouvert pour d_f. En effet, si $x \in]-1, 1[$ et $x_n \to x$, alors, pour n suffisamment grand, $x_n \neq 0, 1$, et donc $\mathrm{d}_f(x_n, x) = |x_n - x|$, de telle sorte que pour un autre $N' \geqslant N$, on a $x_n \in]-1, 1[\subset]-1, 1]$, ce qui prouve que x est intérieur par la Proposition 3.6. Reste à traiter le cas où $x = 1$. Si l'on prend une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 1 pour d_f, on se convainc que ceci est équivalent à dire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour d_s. Ainsi, pour n suffisamment grand, on a $x_n \in]-1, 1]$, ce qui conclut la preuve du fait que 1 est intérieur à $]-1, 1]$ par la Proposition 3.6.

Le prochain énoncé montre le lien entre le concept d'équivalence de normes, et la convergence.

Proposition 3.11. *Soit E un espace vectoriel et $\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$ deux normes sur E. Alors, les énoncés suivants sont équivalents :*

i. *$\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$ sont équivalentes ;*

ii. *une suite est convergent pour $\mathfrak{n}_1$ si et seulement si elle est convergente pour $\mathfrak{n}_2$, vers la même limite ;*

iii. *une suite est convergente vers 0_E pour $\mathfrak{n}_1$ si et seulement si elle est convergente vers 0_E pour $\mathfrak{n}_2$, vers la même limite.*

Démonstration. *i.* $\Rightarrow$ *ii.* implique *ii.* est contenu dans le théorème précédent : si $\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$ sont équivalentes, alors les distances induites sont métriquement équivalentes, et donc topologiquement équivalentes par la Proposition 2.11. Donc, par le Théorème 3.10, on a bien le *ii.*.

Il est clair que *ii.* $\Rightarrow$ *iii.*, car il s'agit d'un résultat plus faible.

Il reste donc à montrer que *iii.* $\Rightarrow$ *i.*. On raisonne par l'absurde.

Supposons que *iii.* soit vérifié mais que $\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$ ne soient pas équivalentes. Cela signifie qu'une des deux inégalités suivantes est fausse :

1. Il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\mathfrak{n}_1(x) \leqslant C_1 \mathfrak{n}_2(x)$.
2. Il existe $C_2 > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\mathfrak{n}_2(x) \leqslant C_2 \mathfrak{n}_1(x)$.

Supposons pas exemple que ce soit la deuxième inégalité qui soit fausse (sinon, il suffit d'échanger $\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$ dans le raisonnement qui suit). Étant clair que l'inégalité est vraie en $x = 0_E$, ceci revient donc à dire que l'inégalité suivante est fausse :

$$\exists C_2 > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall x \in E \setminus \{0_E\}, \quad \frac{\mathfrak{n}_2(x)}{\mathfrak{n}_1(x)} \geq M. \tag{3.8}$$

On passe donc à la contraposée, et on obtient :

$$\forall M > 0, \quad \exists x \in E \setminus \{0_E\} \quad \text{t.q.} \quad \frac{\mathfrak{n}_2(x)}{\mathfrak{n}_1(x)} \geq M. \tag{3.9}$$

En choisissant successivement $M = 1$, $M = 2$, ..., etc., on construit donc une suite d'éléments de E, notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\frac{\mathfrak{n}_2(x_n)}{\mathfrak{n}_1(x_n)} > n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Définissons alors la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation $y_n := \frac{x_n}{\sqrt{n}\mathfrak{n}_1(x_n)}$. Il est clair que pour n qui tend vers $+\infty$ on a

$$\mathfrak{n}_1(y_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{n}_2(y_n) > n\mathfrak{n}_1(y_n) = \sqrt{n} \longrightarrow +\infty. \tag{3.11}$$

On a donc construit une suite qui tend vers 0_E pour $\mathfrak{n}_1$ mais pas pour $\mathfrak{n}_2$, ce qui est absurde par hypothèse. Donc il existe $c > 0$ tel que $\mathfrak{n}_2 \leq c\mathfrak{n}_1$. Le même raisonnement fait en échangeant les rôles de $\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$ donne l'autre inégalité et clôt la démonstration. □

On a donc notamment le résultat suivant, faux en général dans un espace métrique, mais vrai dans les evn .

Théorème 3.12. *Deux normes sur un evn sont équivalentes si et seulement si les métriques canoniquement associées sont topologiquement équivalentes.*

3.2.2 Densité dans un espace métrique

Le concept de densité dans un espace vectoriel normé, bien qu'un peu théorique, conduit à des résultats des plus intéressants.

Définition 3.4. Soit (X, d) un espace métrique. Une partie $A \subset X$ est *dense dans* X si et seulement si $\bar{A} = X$.

Par la dernière définition de l'adhérence donnée dans la Définition 2.6 et la caractérisation de l'adhérence donnée dans la Proposition 2.7,, on en déduit immédiatement le résultat suivant, très souvent utilisé en pratique.

Proposition 3.13. *A est dense dans (X, d) si et seulement si pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$,n il existe $A \in A$ tel que $d(x, a) \leqslant \varepsilon$.*

Voici deux caractérisations différentes de la densité, très utiles en pratique. Elles découlent directement des Propositions 2.7 et 3.7.

Proposition 3.14. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

i. A est dense dans X ;

ii. (Caractérisation topologique) Pour tout ouvert $G \subset X$ on a $G \cap A \neq \varnothing$;

iii. (Caractérisation séquentielle) Pour tout $x \in X$ il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ telle que $x_n \longrightarrow x$.

Exemple 3.1. On montre que $\mathbb{Q}$ est une partie dense de $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$ à travers la caractérisation séquentielle. Soit $x \in \mathbb{R}$ et appelons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$x_n = \frac{1}{10^n}\lfloor 10^n x\rfloor, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

Ici, $\lfloor y\rfloor$ dénote la partie entière de y. Par définition, $x_n \in \mathbb{Q}$. De plus, comme $y - 1 < \lfloor y\rfloor \leq y$ on a que

$$x - \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^n}(10^n x - 1) < x_n \leq \frac{1}{10^n}10^n x = x. \tag{3.13}$$

Par le théorème d'encadrement, on a donc que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x. \tag{3.14}$$

Donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

On observe que, maintenant qu'on sait que $\mathbb{Q}$ est dense, la caractérisation topologique de la densité nous permet de déduire immédiatement que pour tout réel $a < b$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $a < q < b$. En effet, $]a, b[$ est un ouvert pour $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$. On a déjà utilisé ce résultat dans des exercices.

3.2.3 Théorème de Weierstrass

Montrons dès maintenant un résultat de densité très important, qui concerne le sous-espace des fonctions polynomiales :

$$\mathcal{P}([0,1]) = \left\{ P|_{[0,1]} \mid P \in \mathbb{R}[X] \right\} \subset C([0,1]). \tag{3.15}$$

Théorème 3.15 (Théorème de Weierstrass)**.** *L'ensemble des fonctions polynomiales $\mathcal{P}([0,1])$ est dense dans $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.*

Ce théorème est une consequence immédiate du résultat suivant.

Théorème 3.16 (Théorème de Bernstein)**.** *Soit $f \in C([0,1)]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose*

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \qquad x \in [0,1]. \tag{3.16}$$

Alors, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1])$ converge vers f par rapport à $\|\cdot\|_\infty$.

Démonstration. Nous allons avoir besoin du lemme suivant.

Lemma 3.17. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}, \qquad \forall x \in [0,1]. \tag{3.17}$$

On admet ce lemme, dont on trouvera la preuve dans l'Exercice 3.13.

Revenons à la démonstration du Théorème. La fonction f est continue sur $[0,1]$, donc, d'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \forall x \text{ t.q. } \left| x - \frac{k}{n} \right| < \eta \implies \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.18}$$

On rappelle la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.19}$$

En choisissant $a = x$ et $b = 1-x$, ceci donne

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \qquad \forall x \in [0,1]. \tag{3.20}$$

Donc, pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} = S_1 + S_2, \tag{3.21}$$

où on a posé

$$S_1 = \sum_{\{k : |x-k/n|<\eta\}} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}, \tag{3.22}$$

$$S_2 = \sum_{\{k : |x-k/n|\geq\eta\}} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}. \tag{3.23}$$

On voit aisement, à l'aide de (3.18) et de (3.20) que

$$S_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.24}$$

À présent, en utilisant le fait que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, on obtient pour la seconde somme :

$$\begin{aligned} S_2 &\leq 2\|f\|_\infty \sum_{\{k : |x-k/n|\geq\eta\}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} \sum_{\{k : |x-k/n|\geq\eta\}} \binom{n}{k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

En utilisant le Lemme 3.17, on en déduit que

$$S_2 \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{2\|f\|_\infty}{4n\eta^2} \tag{3.26}$$

Donc, si on choisit n suffisamment grand (par exemple $n \geq N_0 := \lfloor \|f\|_\infty/(\eta^2\varepsilon) \rfloor + 1$) on a $S_2 \leq \varepsilon/2$. En utilisant aussi (3.24), il s'ensuit alors que

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N_0, \forall x \in [0,1], \quad \text{on a } |f(x) - B_n(x)| \leq \varepsilon. \tag{3.27}$$

Cela demontre donc que $\|f - B_n\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$. □

3.3 Continuité dans un espace métrique

Dans cette section, on commence l'étude des fonctions définies entre espaces métriques.

Définition 3.5. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \to Y$. Soit $A \subset X$ et $x_0 \in \bar{A}$. On dit que f a pour limite y_0 quand x tend vers x_0, selon A, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad \mathrm{d}_X(x, x_0) < \delta \text{ et } x \in A \implies \mathrm{d}_Y(f(x), y_0) < \varepsilon. \tag{3.28}$$

On écrira alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = y_0$ ou $f(x) \longrightarrow y_0$ quand $x \longrightarrow x_0$. Si f a pour limite y_0 quand x tend vers x_0 selon X, on dira plus simplement que f a pour limite y_0 quand x tend vers x_0.

On peut aussi donner une définition à base de voisinages.

Proposition 3.18. *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques et* $f : X \to Y$. *Soit* $A \subset X$ *et* $x_0 \in \bar{A}$. *Alors* f *a pour limite* y_0 *quand* x *tend vers* x_0 *selon* A *si et seulement si pour tout voisinage* V *de* y_0, *il existe un voisinage* U *de* x_0 *tel que*

$$x \in U \cap A \implies f(x) \in V. \tag{3.29}$$

Démonstration. Supposons que f ait pour limite y_0 quand x tend vers x_0 selon A. Soit V un voisinage de y_0. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y_0, \varepsilon) \subset V$. Par définition de la limite, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, \delta) \cap A$, on ait $\mathrm{d}_Y(f(x), y_0) < \varepsilon$, donc $f(x) \in B(y_0, \varepsilon) \subset V$. On prend alors comme voisinage de x_0 $U = B(x_0, \delta)$, ce qui conclut ce sens de la preuve. Inversement, pour tout voisinage V de y_0, il existe un voisinage U de x_0 tel que (3.29) soit vérifié. Soit $\varepsilon > 0$. $B(y_0, \varepsilon)$ étant un voisinage de y_0, il existe un voisinage U de x_0 tel que $x \in U \cap A \implies y \in B(y_0, \varepsilon)$, *i.e.* $d(f(x), y_0) < \varepsilon$. Un tel voisinage U contient une certaine boule $B(x_0, \delta)$ pour un$\delta > 0$. On a donc bien notamment que $\mathrm{d}_X(x, x_0) < \delta$ et $x \in A \implies \mathrm{d}_Y(f(x), y_0) < \varepsilon$, d'où le résultat voulu. □

Enfin, on peut donner une caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction.

Proposition 3.19. *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques et* $f : X \to Y$. *Soit* $A \subset X$ *et* $x_0 \in \bar{A}$. *Alors* f *a pour limite* y_0 *quand* x *tend vers* x_0 *selon* A *si et seulement si*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \quad et \quad x_n \longrightarrow x \implies f(x_n) \longrightarrow y_0. \tag{3.30}$$

Démonstration. Supposons que f ait pour limite y_0 quand x tend vers x_0 selon A, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers x. Par définition de la limite, si $\varepsilon > 0$, on a

$$\exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad \mathrm{d}_X(x, x_0) \implies \mathrm{d}_Y(f(x), y_0) < \varepsilon. \tag{3.31}$$

étant donné $\delta > 0$, par convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient que

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad n \geq N \implies \mathrm{d}_X(x_n, x) < \delta. \tag{3.32}$$

En combinant ces deux faits, on a donc

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad n \geq N \implies \mathrm{d}_Y(f(x_n), y_0) < \varepsilon. \tag{3.33}$$

Puisque ε a été choisi de façon arbitraire, on en déduit que $f(x_n)$ converge vers y_0. Ceci montre donc (3.36)

Raisonnons maintenant par contraposée pour démontrer l'autre implication. Supposons que f est n'admet pas y_0 pour limite quand x tend vers x_0 selon A. Alors, en revenant à la définition de la limite et en passant à la contraposée, on a la propriété suivante :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall \delta > 0, \exists x \in X \quad \text{t.q.} \quad \mathrm{d}_X(x, x_0) < \delta \text{ et } \mathrm{d}_Y(f(x), y_0) > \varepsilon. \tag{3.34}$$

En prenant successivement $\delta = 1, 1/2, \dots 1/n, \dots$, on construit une suite d'éléments de X, notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, vérifiant

$$\mathrm{d}_X(x_n, x) < \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}_Y(f(x_n), y_0) > \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.35}$$

Donc $x_n \longrightarrow x_0$, mais $f(x_n) \not\longrightarrow y_0$, ce qui contredit (3.30). $\square$

Passons maintenant à la définition de la continuité en un point.

Définition 3.6. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : (X, \mathrm{d}_X) \to (Y, \mathrm{d}_Y)$. On dit que f est *continue en* $x_0 \in X$ si $f(x) \longrightarrow f(x_0)$ quand $x \longrightarrow x_0$. On dit que f est *continue sur* $A \subset X$ si f est continue en tout point de A.

On va maintenant caractériser la continuité à travers les suites. En pratique, cette propriété nous servira surtout pour les exercices théoriques, et à prouver qu'une fonction est discontinue. Il s'agit d'une conséquence immédiate de la Proposition 3.19.

Proposition 3.20 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.** *Une fonction* $f : (X, \mathrm{d}_X) \to (Y, \mathrm{d}_Y)$ *est continue en un point* $x \in X$ *si et seulement si*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \quad \text{et} \quad x_n \longrightarrow x \implies f(x_n) \longrightarrow f(x). \tag{3.36}$$

On donne maintenant une autre caractérisation topologique de la continuité.

Proposition 3.21 (Caractérisation topologique de continuité)**.** *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques et* $f : (X, \mathrm{d}_X) \to (Y, \mathrm{d}_Y)$*. Les énoncés suivants sont équivalents.*

i. *f est continue sur X ;*

ii. *Pour tout ouvert $U \subset Y$, l'ensemble $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X ;*

iii. *Pour tout fermé $F \subset Y$, l'ensemble $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.*

Démonstration. Supposons que f soit continue sur X. Par définition de la limite, ceci est équivalent au fait que, pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage $V \subset Y$ de $f(x)$, il existe un voisinage $A \subset X$ de x, que l'on peut choisir ouvert, quitte à le réduire (puisqu'un voisinage contient une boule ouverte), tel que $f(A) \subset V$, par la Proposition 3.18. En particulier, si $U \subset Y$ est ouvert et $f(x) \in U$, on a qu'il existe un ouvert $A \subset X$ tel que $x \in A \subset f^{-1}(U)$. Donc, tout point de $f^{-1}(U)$ est intérieur. Ceci implique *ii.*.

Montrons que *ii.* implique *iii.*. On rappelle que $F \subset Y$ est fermé si et seulement si $Y \setminus F$ est ouvert. Donc $f^{-1}(Y \setminus F)$ est ouvert. Comme par définition d'image réciproque, on a que $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$, ceci implique que $f^{-1}(F)$ est fermé.

Finalement, on montre que si f n'est pas continue alors *iii.* n'est pas vérifiée. Ceci montrera que *iii.* implique *i.* est terminera la preuve. Si f n'est pas continue, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ telle que $x_n \to x_\infty$ et telle que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente vers $f(x_\infty)$. En détaillant cette dernière propriété on observe que, quitte à remplacer $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une sous-suite extraite, on peut admettre que $f(x_\infty) \notin F = \mathrm{Ad}\{f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ceci montre que *iii.* n'est pas vérifié, car implique que $x_\infty \notin f^{-1}(F)$ tandis que $x_\infty \in \mathrm{Ad}(f^{-1}(F)) = \mathrm{Ad}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ par construction. $\square$

Remarque 3.5. Une application peut très bien être continue et telle que l'image d'un ouvert ne soit pas un ouvert (ou que l'image d'un fermé ne soit pas un fermé). Par exemple, considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to [0,1[$ définie par

$$f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}. \tag{3.37}$$

Cette fonction est bien sur continue, mais $f(\mathbb{R}) = [0,1[$, qui est ni ouvert ni fermé.

Avant de continuer la discussion en introduisant des concept plus forts de continuité, on discute comment les fonctions continues permet de comparer différentes topologies.

Définition 3.7. Un *homéomorphisme entre* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) est une fonction $f : X \to Y$ telle que

i. $f : (X, \mathrm{d}_X) \to (Y, \mathrm{d}_Y)$ est continue ;
ii. f est bijective ;
iii. $f^{-1} : (Y, \mathrm{d}_Y) \to (X, \mathrm{d}_X)$ est continue.

On dit que (X, d_X) et (Y, d_Y) sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme entre eux.

En partant de cette définition, il est très difficile de montrer que deux espaces ne sont pas homéomorphes, car on devrait vérifier que aucune bijection puisse être un homéomorphisme.

Exemple 3.2. On collecte ici quelques exemples d'homéomorphismes (ou non).

1. $f : ([0,1], \mathrm{d_s}) \to ([0,1], \mathrm{d_s})$ définie par $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. En effet, f est continue, bijective, et son inverse est $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ qui est continue sur $[0,1]$.
2. Soient $m, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \leq d$, $m \geq 0$ et définissons fonction $f(x) = mx + b$, $x \in [c,d]$. Alors, $f : ([c,d], \mathrm{d_s}) \to ([f(c), f(d)], \mathrm{d_s})$ est un homéomorphisme d'inverse $f^{-1}(x) = (x-b)/m$.
3. L'application $\log : (]0, +\infty[, \mathrm{d_s}) \to (\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$ est un homéomorphisme.
4. La fonction $f : (\mathbb{R}, \mathrm{d_{discr}}) \to (\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$ définie par $f(x) = x$ est continue. On le vérifie aisément à travers la caractérisation topologique, car tout partie de $(\mathbb{R}, \mathrm{d_{discr}})$ est ouverte. Toutefois, f n'est pas un homéomorphisme. En effet, son inverse est $f^{-1}(x) = x$, mais $f^{-1} : (\mathbb{R}, \mathrm{d_s}) \to (\mathbb{R}, \mathrm{d_{discr}})$ n'est pas continue car $]0,1]$ est ouvert dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d_{discr}})$ mais $f^{-1}(]0,1]) =]0,1]$ n'est pas ouvert dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$.

Le théorème suivant montre que le concepts d'équivalence topologique et d'existence d'un homéomorphisme coïncident. Pour cette raison, à partir de maintenant on confondra ces termes.

Théorème 3.22. *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques. Soit* $f : X \to Y$ *une bijection. On note* d_f *la distance induite par* f *sur* X *(c'est bien une distance par l'Exercice* (1.2) *et le fait que* f *est injective), i.e.,* $\mathrm{d}_f(x_1, x_2) = \mathrm{d}_Y(f(x_1), f(x_2))$ *pour tout* $x_1, x_2 \in X$*. Les énoncés suivant sont équivalents.*

i. *f est un homéomorphisme ;*

ii. *(X, d_X) et (X, d_f) sont topologiquement équivalents.*

Démonstration. On commence par supposer que f est un homéomorphisme et on montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ est convergente par rapport à d_X si et seulement si elle est convergente par rapport à d_f. Par le Théorème 3.10, ceci impliquera que (X, d_X) et (X, d_f) sont topologiquement équivalents.

Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente vers $x_\infty \in X$ par rapport à d_f. Ceci est équivalent au fait que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ est convergente vers $f(x_\infty)$ par rapport à d_Y. Comme f^{-1} est continue, on a donc que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers x_∞ par rapport à d_X. Le même raisonnement avec f au lieu de f^{-1} permet de conclure que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente par rapport à d_X, elle est convergente aussi par rapport à d_f.

On suppose maintenant que (X, d_X) et (X, d_f) sont topologiquement équivalents et on montre que f est un homéomorphisme. Par le Théorème 3.10, les espaces métriques (X, d_X) et (X, d_f) ont les mêmes suites convergentes, vers la même limite. Ainsi si $x_n \to x$ pour (X, d_x), on a $x_n \to x$ pour d_f, autrement dit, $f(x_n) \to f(x)$ pour d_Y et f est bien continue. Un raisonnement similaire appliqué à f^{-1} permet de conclure que f^{-1} est aussi continue. □

3.3.1 Uniforme continuité et applications Lipschitziennes

Rappelons la définition de la continuité d'une fonction sur tout l'espace.

Définition 3.8. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : (X, \mathrm{d}_X) \to (Y, \mathrm{d}_Y)$. Alors,$f$ est continue si et seulement si

$$\forall x_0 \in X \text{ et } \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad \mathrm{d}_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall x \in X \quad \text{t.q.} \quad \mathrm{d}_X(x, x_0) < \delta. \tag{3.38}$$

Dans la propriété ci-dessus, δ peut dépendre à la fois de x_0 et de ε. On peut renforcer ce concept de continuité en imposant tout simplement l'indépendance de δ vis-à-vis de x_0.

Définition 3.9. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : (X, \mathrm{d}_X) \to (Y, \mathrm{d}_Y)$. On dit que f est *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad \mathrm{d}_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad \text{t.q.} \quad \mathrm{d}_X(x_1, x_2) < \delta. \tag{3.39}$$

Le fait qu'une fonction uniformément continue soit continue est, bien sûr, triviale, mais l'inverse est faux.

Exemple 3.3. On considère $f : x \in (\mathbb{R}, \mathrm{d}_s) \mapsto x^2 \in (\mathbb{R}, \mathrm{d}_s)$. Il est bien connu que f est continue (par exemple comme produit de deux fonctions continues). Raisonnons par l'absurde et supposons que f est uniformément continue, et écrivons la définition pour $\varepsilon = 1$:

$$\exists\delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad |x_1^2 - x_2^2| < 1 \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad \text{t.q.} \quad |x_1 - x_2| < \delta. \tag{3.40}$$

Prenons alors $x_1 = n \in \mathbb{N}$, $x_2 = x_1 + \frac{\delta}{2}$. Clairement $|x_2 - x_1| < \delta$. Par contre, $|x_1^2 - x_2^2| = |n^2 - (n + \frac{\delta}{2})^2| = \left|\frac{\delta^2}{4} - n\delta\right|$. Cette quantité tend vers $+\infty$ quand $n \to \infty$, ce qui contredit donc (3.40) pour n suffisamment grand.

On considérera aussi la notion suivante, plus forte que l'uniforme continuité.

Définition 3.10. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : (X, \mathrm{d}_X) \to (Y, \mathrm{d}_Y)$. Soit $L \geqslant 0$. On dit que f est *L-lipschitzienne* si

$$\mathrm{d}_Y(f(x), f(x')) \leq L\, \mathrm{d}_X(x, x'), \qquad \forall x, x' \in X. \tag{3.41}$$

On dit que f est Lipschtzienne s'il existe un $L \geqslant 0$ pour lequel elle est L-Lipschtzienne.

On a alors la proposition suivante, évidente (il suffit de prendre $\delta = L\varepsilon$ dans la définition de la continuité uniforme).

Proposition 3.23. *Toute fonction Lipschitzienne est uniformément continue.*

De même, il existe des fonctions uniformément continues mais pas Lipschitziennes.

Exemple 3.4.

La fonction $f : ([0, 1], \mathrm{d_s}) \to (\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne, mais elle est uniformément continue. En effet, soient $x, y \in]0, 1]$ tels que, e.g., $x < y$. Alors, si $y - x < \eta$ on peut écrire

$$(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 = x + y - 2\sqrt{xy} < x + y - 2x = x - y < \eta. \tag{3.42}$$

Ici on a utilisé que $x < \sqrt{xy} < y$. Il suffit alors de choisir $\eta = \varepsilon^2$ pour prouver l'uniforme continuité de f. Pour montrer qu'elle n'est pas Lipschitzienne, on raisonne par l'absurde. S'il existait $L > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0, 1]$, on ait $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant L|x - y|$, en prenant $y = 0$ et $x = 1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on aurait $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{L}{n}$, *i.e.* $\sqrt{n} \leqslant L$. Mais le membre de gauche tend vers $+\infty$ quand $n \to \infty$, donc cette inégalité est forcément fausse pour n suffisamment grand.

La notion suivante est souvent utile.

Définition 3.11. Une *application bi-lipschitzienne entre* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) est une fonction $f : X \to Y$ telle que

i. $f : (X, \mathrm{d}_X) \to (Y, \mathrm{d}_Y)$ est lipschitzienne ;
ii. f est bijective ;
iii. $f^{-1} : (Y, \mathrm{d}_Y) \to (X, \mathrm{d}_X)$ est lipschitzienne.

On a alors le résultat suivant, à comparer avec le théorème 3.22, qui est ici évident en revenant aux définitions.

Proposition 3.24. *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques. Soit* $f : X \to Y$ *une bijection. On note* d_f *la distance induite par* f *sur* X*. Les énoncés suivant sont équivalents.*

i. f *est une application bi-lipschitzienne ;*

ii. d_X *et* d_f *sont métriquement équivalentes.*

3.4 Exercices

Propriétés de la convergence

Exercice 3.1. (*) On se place dans $C([0,1], \mathbb{R})$. On considère $x_n = X^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a-t-elle une limite pour $\|\cdot\|_\infty$?
2. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a-t-elle une limite pour $\|\cdot\|_1$?

Exercice 3.2. (*) Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ est *définitivement constante* s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $x_\infty \in X$ tels que $x_n = x_\infty$ pour tout $n \geq N$.

1. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ est définitivement constante, alors elle converge vers x_∞.
2. Montrer que une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge par rapport à la métrique discrète si et seulement si elle est définitivement constante. En déduire que la convergence par rapport à $\mathrm{d}_{\mathrm{discr}}$ implique la convergence par rapport à une métrique quelconque.
3. Trouver une suite dans $\mathbb{R}$ qui converge par rapport à la métrique standard d_{s} mais qui ne converge pas par rapport à $\mathrm{d}_{\mathrm{discr}}$.

Exercice 3.3. (**) Dans $\mathbb{R}[X]$, on définit, pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $(n = \deg(P))$,

$$||P|| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| + \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{k},$$

et $||P||_1 = \int_0^1 |P|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_1$ sont des normes.
2. Montrer que X^n tend vers 1 pour $\|\cdot\|$.
3. Montrer que X^n tend vers 0 pour $\|\cdot\|_1$.
4. Les normes sont-elles équivalentes ?

Les notions topologiques à travers la convergence

Exercice 3.4. (*) En utilisant la caractérisation séquentielle des fermés, déterminer l'adhérence des ensembles suivants.

1. $A = \{x \in \mathbb{R} | x = 1/n \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N}^*\}$ dans $\mathbb{R}$ muni de d_s.

2. $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = \sin(1/x_1), x_1 \neq 0$, dans $\mathbb{R}^2$ muni de d_2.

Exercice 3.5. (**) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn , et V un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit H un hyperplan de E. Montrer que H est soit fermé, soit dense.

Exercice 3.6. (*) On se place dans $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

1. Montrer que l'ensemble des suites croissantes est fermé.
2. Montrer que l'ensemble des suites tendant vers 0 est fermé.

Exercice 3.7. (***) [Points isolés] Soit (X, d) un espace métrique. Un point $x \in X$ est *isolé* s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) = \{x\}$.

1. Montrer que $x \in X$ est isolé si et seulement si $\{x\}$ est ouvert.
2. Montrer que $x \in X$ est isolé si et seulement si toute suite qui converge vers x est définitivement constante, dans le sens de l'Exercice 3.2. En déduire que si X admet un point non isolé, alors d n'est pas topologiquement équivalente à la métrique discrète.
3. Soit $p \notin \mathbb{N}$, on note $p = \infty$. Définissons $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et appellons d_c la distance définie par l'injection $f : \mathbb{N}_\infty \to \{\frac{1}{n+1} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ donnée par $f(n) = 1/(n+1)$ si $n \in \mathbb{N}$ et $f(\infty) = 0$ (voir Exercice 1.2). Montrer que tout point de $\mathbb{N}_\infty$ est isolé, sauf ∞.
4. Montrer qu'il n'y a pas des points isolés dans un evn .

Exercice 3.8. (***) Commencer par montrer que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(\mathbb{R})$. On considère après la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \ell^\infty$, où $x^k = (x^k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par (Attention ! Il s'agit d'une suite de suites) :

$$x^k_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } 1 \leq n \leq k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.43}$$

Montrer que :

1. $x^k \in \ell^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. $x^k \to x^\infty$ par rapport à $\|\cdot\|_\infty$, où $x^\infty = (x^\infty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $x_0 = 0$ et $x^\infty_n = 1/\sqrt{n}$ pour $n \geq 1$.
3. Montrer que $x^\infty \notin \ell^2(\mathbb{R})$ et en déduire que $\ell^2(\mathbb{R})$ n'est pas fermé dans $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 3.9. (**) En suivant la même idée que dans l'Exemple 3.1, montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_\mathrm{s})$.

Exercice 3.10. (***) Soit (X, d) un espace métrique, et $y \in X$.

1. Montrer que $x \mapsto d(x, y)$ est 1-Lipschitzienne.
2. Montrer que $(x, y) \in X \times X \to d(x, y)$ est 2-Lipschitzienne.

3. Soit $A \subset E$ non vide. Montrer que $x \mapsto d(x, A)$ est 1-Lipschtzienne.
4. Soient A et B deux parties disjointes, non vides, et fermées de E. On pose
$$f : x \in E \mapsto \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$
Montrer que f est bien définie (on pourra utiliser un résultat de l'exercice 2.14), à valeurs dans $[0, 1]$, continue, telle que $A = f^{-1}(\{0\})$ et $B = f^{-1}(\{1\})$.
5. En déduire qu'il existe deux ouverts U et V tels que $A \subset U$, $B \subset V$, et $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 3.11. (**) Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que l'intersection de deux parties ouvertes et denses est dense. Que dire de l'intersection de deux parties denses par forcément ouvertes ?

Exercice 3.12. (**) Soit $\mathfrak{C} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ qui convergent dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$. Montrer que $\mathfrak{C} \subset \ell^\infty(\mathbb{R})$ et que $\mathfrak{C}$ n'est pas dense dans $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 3.13. (**) On se propose de démontrer le Lemme 3.17.

1. Traiter le cas $n = 1$.
2. On suppose maintenant que $n \geq 2$.
   a) Montrer que
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = x^2 - 2x\Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{3.44}$$
   où on a posé
   $$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \qquad \text{et} \qquad \Sigma_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k}. \tag{3.45}$$
   b) En dérivant par rapport à $a \in \mathbb{R}$ à droite et à gauche dans le binôme de Newton (3.19), montrer que
   $$a(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} a^k b^{1-k}, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.46}$$
   c) en déduire que $\Sigma_1 = x$.
   d) Montrer que
   $$a^2(a+b)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} a^k b^{n-k}, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.47}$$
   e) En déduire que
   $$\Sigma_2 = \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{n^2} x^2. \tag{3.48}$$

f) Conclure.

Exercice 3.14. (*) Soient $f, g \in C([0,1])$ tels que on a l'égalité des moments suivante

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \int_0^1 x^n g(x)\,dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.49}$$

Montrer que $f = g$. On pourra commencer par démontrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $\int_0^1 P(x)\,(f(x) - g(x))\,dx = 0$.

Exercice 3.15. (**) Soit $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $||f - P_n||_\infty \to 0$ et $||f' - P_n'||_\infty \to 0$.

Exercice 3.16. (**) Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R})$, positive. Montrer Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $||f - P_n||_\infty \to 0$, avec $P_n \geqslant 0$ sur $[0,1]$. *Indication : si on a une suite Q_n de polynôme qui converge vers f, on pourra montrer que* $\inf_{x\in[0,1]} Q_n \to \inf_{x\in[0,1]} f$.

Continuité dans un espace métrique

Exercice 3.17. (*) Étudier la continuité des applications suivantes :

$$\begin{aligned}
T : (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) &\to (\mathbb{R}, |\cdot|) \\
f &\mapsto f(0) \\
T : (C([0,1]), \|\cdot\|_1) &\to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \\
f &\mapsto f \\
T : (C([0,1]), \|\cdot\|_1) &\to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \\
f &\mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt\right)
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Exercice 3.18. (**)Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et $h : E \to E$ une application continue vérifiant que pour tout $x \in E$, on ait $h(x) = h(x/2)$. Que dire de h ?

Exercice 3.19 (Densité et continuité)**.** (*) Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f, g : X \to Y$ deux fonctions continues. Montrer que si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$, où $A \subset X$ est une partie dense, alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in X$.

Exercice 3.20. (**) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par rapport à $\mathrm{d_s}$ et telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. On note $f(1) = a \in \mathbb{R}$. Calculer f sur $\mathbb{Q}$ et puis sur $\mathbb{R}$ (on utilisera l'Exercice 3.19).

Exercice 3.21. (**) Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à valeurs réels.

1. Montrer que $\|M\| = \max_{i,j\in\{1,2\}} |m_{ij}|$, où $M = (m_{ij})_{i,j=1,2}$, est une norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer adhérence et intérieur de l'ensemble des matrices inversibles. Est-il ouvert ou fermé ?

Exercice 3.22. (*) On définit $\mathrm{d} : [0,1[\times[0,1[\to [0,+\infty[$ par

$$\mathrm{d}(x,y) = \min\{|x-y|, 1-|x-y|\}, \qquad x,y \in [0,1[. \tag{3.51}$$

Montrer que d est une distance et que la suite $1-1/n$ converge vers 0 par rapport à d. En déduire que $([0,1[,\mathrm{d})$ n'est pas homéomorphe à $([0,1[,\mathrm{d_s})$.

Exercice 3.23. (**) Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ et $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

1. Démontrer que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. Démontrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Exercice 3.24. (***) Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$, non réduit à 0.

1. Justifier l'existence de $m = \inf\{x \in H, x > 0\}$.
2. On suppose que $m > 0$. Montrer que $m \in H$ puis que $H = m\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $m = 0$. Montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Soient a, b deux réels non nuls. Donner une CNS sur a et b pour que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} := \{an + bm | (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ soit dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.25. (***) On cherche à montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t)e^{int}\,dt = 0, \qquad \forall f \in C([0,1]). \tag{3.52}$$

À cet effet, soit $\mathcal{A}([0,1]) = \{f \in C([0,1]) \mid f \text{ est affine par intervalles}\}$.

1. Montrer cette relation lorsque $f \in C^1([0,1])$, puis $f \in \mathcal{A}([0,1])$;
2. Montrer que $\mathcal{A}([0,1])$ est une partie dense de $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, en admettant le Théorème de Heine (*i.e.* que toute fonction de $C([0,1])$ est uniformément continue) ;
3. En déduire la relation pour toute fonction continue.

Exercice 3.26. (***) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue pour d_s. Montrer qu'elle est sous-linéaire : il existe $a, b >$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on ait $|f(x)| \leqslant ax + b$.

4 Complétude et théorème du point fixe de Picard

4.1 Complétude

4.1.1 Suites de Cauchy

Définition 4.1. Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ est *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N. \tag{4.1}$$

Remarque 4.1. Parfois, on utilisera la caractérisation suivante, qui est trivialement équivalente à (4.1) en remplaçant m par $n + p$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad d(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Une suite de Cauchy est une suite dont les points se rapprochent de plus en plus entre eux. On démontre donc aisément les propriétés suivantes.

Proposition 4.1. *Toute suite convergente dans un espace métrique est de Cauchy.*

Démonstration. Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite convergente vers $x_\infty \in X$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{d}(x_n, x_\infty) < \varepsilon/2$ si $n \geq N$. Par inégalité triangulaire on a donc que

$$\mathrm{d}(x_n, x_m) \leq \mathrm{d}(x_n, x_\infty) + \mathrm{d}(x_\infty, x_m) < \varepsilon, \qquad \forall n, m \geq N. \tag{4.3}$$

Cela montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. □

Proposition 4.2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite de Cauchy. Pour $\varepsilon > 0$ on a donc, par définition de suite de Cauchy, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathrm{d}(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon, \qquad \forall n, m \geq N. \tag{4.4}$$

Donc, pour $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathrm{d}(x_k, x_N) \leq \max_{\ell \in [\![1,N]\!]} \mathrm{d}(x_\ell, x_N) + \varepsilon. \tag{4.5}$$

En particulier, comme le max est sur un ensemble fini, il existe $c > 0$ tel que $\mathrm{d}(x_k, x_N) \leq c$. Finalement, par inégalité triangulaire, on a

$$\mathrm{d}(x_k, x_\ell) \leq \mathrm{d}(x_k, x_N) + \mathrm{d}(x_N, x_\ell) \leq 2c, \qquad \forall k, \ell \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Ceci prouve que $\operatorname{diam}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq 2c$ et donc l'énoncé. □

La propriété suivante est très utile dans la pratique, pour démontrer qu'une suite de Cauchy converge.

Proposition 4.3. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite de Cauchy et $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite. Alors, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge.*

Démonstration. La convergence de $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sachant que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, est une conséquence immédiate de la Proposition 3.4. Supposons maintenant que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente vers x_∞. L'inégalité triangulaire nous dit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{d}(x_n, x_\infty) \le \mathrm{d}(x_n, x_{n_k}) + \mathrm{d}(x_{n_k}, x_\infty), \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Soit $\varepsilon > 0$. La convergence de $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ implique qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{d}(x_{n_k}, x_\infty) < \varepsilon/2$ si $k \ge K$. D'autre part, la définition de suite de Cauchy nous dit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{d}(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ si $n, m \ge N$. Comme $k \mapsto n_k$ est strictement croissante par définition de suite extraite, il existe donc $\bar{k} \ge K$ tel que $n_{\bar{k}} \ge M$. Donc, par (4.7), on complète la démonstration. □

Pour conclure, donnons une condition suffisante très utilisée en pratique pour qu'une suite soit de Cauchy, et qui peut être interprétée comme une sorte "d'uniformité" vis-à-vis de l'entier p qui intervient dans la deuxième définition équivalente d'une suite de Cauchy.

Proposition 4.4. *Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite vérifiant la propriété suivante : il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs tendant vers 0, telle que*

$$d(x_n, x_{n+p}) \le a_n \quad \forall n \ge N, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ est une suite de Cauchy.

Démonstration. C'est immédiat : soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait $0 \leqslant a_n \leqslant \varepsilon$. Donc

$$d(x_n, x_{n+p}) \le a_n \le \varepsilon, \quad \forall n \ge N, \forall p \in \mathbb{N}.$$

□

4.1.2 Espaces complets

On rappelle le théorème suivant, déjà vu l'année passée, et valable pour la convergence de suite de réels par rapport à la distance standard.

Théorème 4.5 (Critère de Cauchy). *Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels est de Cauchy, alors elle est convergente.*

Démonstration. Nous redonnons une preuve de ce théorème, qui utilise la Proposition 4.3. Pour cela, nous allons montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une sous-suite monotone. On appelle

$$A = \{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x_m < x_n, \forall m > n\}.$$

De deux choses l'une :

— Soit A est de cardinal infini, auquel cas A est un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{N}$. On énumère ces éléments en une liste strictement croissante $n_1, n_2, \ldots$. Alors $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et par définition de A, elle est strictement décroissante. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant borné par la Proposition 4.2, le théorème de la limite monotone assure que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge par la Proposition 4.3.

— Si A est de cardinal fini, on note M son plus grand élément. Tous les éléments au dessus de M ne sont pas dans A. Ainsi, si $n_0 = M + 1$, il existe un $n_1 > n_0$ tel que $x_{n_0} \leqslant x_{n_1}$. De même, il existe $n_2 > n_1$ tel que $x_{n_1} \leqslant x_{n_2}$. En poursuivant ce processus, on crée comme au point précédent est une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante. On conclut alors exactement par les mêmes arguments qu'au premier point.

□

Ce théorème n'est plus vrai si on remplace $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$ avec un espace métrique général, comme on montre dans l'exemple suivant.

Exemple 4.1. On considère l'espace métrique $(]0,1], \mathrm{d_s})$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,1]$, $x_n = \frac{1}{n+1}$, est de Cauchy mais n'est pas convergente dans $]0,1]$. En effet, soit $\iota : (]0,1], \mathrm{d_s}) \to (\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$ l'inclusion de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (*i.e.* la fonction identité). On vérifie aisément qu'elle est continue. Comme $\iota(x_n) = x_n$, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente dans $(]0,1], \mathrm{d_s})$ à x, elle serait aussi convergente dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$, vers $\iota(x) = x$. Toutefois, est immédiat observer que $x_n \longrightarrow 0$ dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$. Par unicité de la limite, on devrait donc avoir $x_\infty = 0 \in]0,1]$, ce qui est absurde.

Définition 4.2. On dit que l'espace métrique (X, d) est *complet* si toute suite de Cauchy de X est convergente dans X. Si $(E, ||\cdot||)$ est un evn complet pour la métrique canoniquement associée à sa norme, on dit que E est un espace de Banach.

On peut interpréter la complétude comme le fait de n'avoir pas de trous. En effet, le concept de suite de Cauchy nous permet, dans un certain sens, de capter ces trous sans jamais sortir de l'espace.

Remarque 4.2. Le Théorème 4.5 montre que $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$ est un espace métrique complet.

Typiquement, pour montrer qu'un espace est complet on applique le procédé suivant :

1. On fixe une suite de Cauchy quelconque ;
2. On trouve, intuitivement, un candidat pour la limite ;
3. On prouve que le candidat limite est bien dans l'espace ;
4. On montre que la suite converge effectivement vers le candidat limite.

On commence par donner un résultat général, qui nous montrera comment appliquer le chemin ci-dessus.

Proposition 4.6. *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $A \subset X$. Les énoncés suivants sont équivalents.*

i. A est fermé ;

ii. L'espace métrique $(A, \mathrm{d}_{|A})$ (la distance induite sur A) est complet.

Démonstration. On suppose que A est fermé, et on fixe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy par rapport à $\mathrm{d}_{|A}$. Par définition de $\mathrm{d}_{|}A$, on a que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de Cauchy comme suite de (X, d). Donc, elle converge vers un point $x_\infty \in X$. Puisque A est fermé dans X, on a que $x_\infty \in A$. Donc A est complet.

Supposons maintenant que $(A, \mathrm{d}_{|A})$ soit complet et fixons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers $x_\infty \in X$. En particulier, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X, d) et donc dans $(A, \mathrm{d}_{|A})$. Par complétude de $(A, \mathrm{d}_{|A})$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $a \in A$ par rapport à $\mathrm{d}_{|A}$. Mais alors a est limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi par rapport à d et, par unicité de la limite, $x_\infty = a \in A$. Donc, A est fermé. □

Avant d'étudier la complétude des espaces métriques introduits dans le Chapitre 1, on montre avec l'exemple suivant que la notion de complétude est une notion métrique et pas seulement topologique, au sens où on peut avoir deux distances topologiquement équivalentes sur un même ensemble, pour lequel l'un des espaces métriques est complet, et l'autre non.

Exemple 4.2. La distance standard $\mathrm{d_s}$ sur $\mathbb{R}$ est topologiquement équivalente à la distance

$$\mathrm{d}(x, y) = \big|\arctan(x) - \arctan(y)\big|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

En effet, dans le langage du Théorème 3.22, d est la distance induite par la fonction $\arctan : (\mathbb{R}, \mathrm{d_s}) \to (]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \mathrm{d_s})$, qu'on vérifie aisément être un homéomorphisme. Toutefois, $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$ est complet, tandis que $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$ ne l'est pas. Cela peut se démontrer soit en observant que la complétude de $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$ est équivalente à celle de $(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \mathrm{d_s})$, qui n'est pas complet car $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\subset \mathbb{R}$ n'est pas fermé, soit, d'une façon plus directe, en montrant que la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ est de Cauchy par rapport à d et non convergente.

Par contre, on a le résultat suivant.

Proposition 4.7. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et soit $f : (X, \mathrm{d}_X) \to (Y, \mathrm{d}_Y)$ une fonction bi-continue et uniformément continue. Si (Y, d_Y) est complet, alors (X, d_X) est complet.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy de (X, d_X). f étant uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que si $y, y' \in Y$ sont tels que $\mathrm{d}_Y(y, y') \leqslant \delta$, alors on a $\mathrm{d}_X(f(y), f(y')) \leqslant \varepsilon$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n, m \geqslant N$, on ait $\mathrm{d}_Y(x_n, x_m) \leqslant \delta$.

On voit donc que si $n, m \geqslant N$, alors $\mathrm{d}_Y(f(x_n), f(x_m)) \leqslant \varepsilon$.

On pose alors $y_n = f(x_n)$. Ce qui précède montre que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans (Y, d_Y) complet. Elle converge donc vers un certain $y \in Y$. f^{-1} étant continue, on en déduit que $x_n = f^{-1}(y_n) \to x$. D'où le résultat voulu. □

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 4.8. *Soient* d_1 *et* d_2 *deux métriques métriquement équivalentes sur* X*. Alors,* (X, d_1) *est complet si et seulement si* (X, d_2) *est complet.*

Démonstration. dire que d_1 et d_2 sont métriquement équivalentes équivaut à dire que l'application $Id : (X, \mathrm{d}_1) \to (X, \mathrm{d}_2)$ est bi-lipschtzienne. Donc $Id : (X, \mathrm{d}_1) \to (X, \mathrm{d}_2)$ et $Id : (X, \mathrm{d}_2) \to (X, \mathrm{d}_1)$ sont lipschitziennes et donc uniformément continues, d'où le résultat. □

4.1.3 Exemples d'espaces complets

On commence avec la distance discrète.

Proposition 4.9. *Soit* X *un ensemble et* d_{discr} *la distance discrète sur* X*. Alors,* (X, d_{discr}) *est complet.*

Démonstration. L'énoncé est évident car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ est de Cauchy si et seulement s'il existe $x_\infty \in X$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $x_n = x_\infty$ pour tout $n \geq N$ (on a déjà vu quelque chose de similaire, il suffit de prendre $\varepsilon = 1/2$ dans la définition des suites de Cauchy). Ceci implique trivialement que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. □

Maintenant, regardons la topologie produit.

Proposition 4.10. *Soit* $k \in \mathbb{N}$ *avec* $k \geqslant 2$ *et* $(X_i, \mathrm{d}_i)_{i\in[|1,k|]}$ *une collection de* n *espaces métriques complets. On pose* $X = X_1 \times X_2 \ldots \times X_k$*, muni de la distance produit* d *définie dans la Proposition 1.3. Alors* (X, d) *et complet.*

Démonstration. On se contente de traiter le cas $k = 2$, le résultat général étant alors facile à montrer par récurrence. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite de Cauchy. Si on note $\pi_i : X \to X_i$ $(i = 1, 2)$ la projection standard (*i.e.* l'application $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mapsto x_i \in X_i$), on a par définition de d que

$$\mathrm{d}_i(\pi(x_n), \pi(x_m)) \leq \mathrm{d}(x_n, x_m), \qquad i = 1, 2. \tag{4.9}$$

Ceci permet de montrer que $(\pi_i(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset X_i$ est de Cauchy et donc qu'elle converge par complétude de (X_i, d_i) vers un certain y_i $(i = 1, 2)$. Par définition de d, on a clairement que $\mathrm{d}(x_n, (y_1, y_2)) = \max_{i=1,2} \mathrm{d}_i(\pi_i(x_n), y_i) \to 0$ quand $n \to \infty$, et on a donc bien que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans X. □

De même, on peut montrer le résultat suivant.

Proposition 4.11. *L'evn* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ *est complet pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $p \in [1, +\infty]$*.*

Démonstration. La preuve est complètement identique à cette précédente, en prenant les projections sur chacune des composantes. □

Pour montrer qu'un espace n'est pas complet, il suffit de trouver une suite de Cauchy qui n'est pas convergente (*c.f.* Exercice 4.4).

L'exemple suivant montre qu'il n'est pas suffisant d'en exhiber une qui converge vers un élément "hors de l'espace", mais qu'il faut aussi vérifier proprement que l'on converge ne pas vers un élément de l'espace. En effet, l'unicité de la limite n'est pas nécessairement vérifiée pour les éléments hors de l'espace.

Exemple 4.3. Considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1])$ définie par $f_n(x) = x^n$. On peut montrer que cette suite est de Cauchy par rapport à la norme $\|\cdot\|_1$. De plus, si on pose

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1; \\ 1 & \text{si } x = 1, \end{cases} \tag{4.10}$$

on a $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |f_n(x) - g(x)|\,dx = 0$ et $g \notin C([0,1])$.

Toutefois, ceci n'est pas suffisant pour montrer que $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet. En effet, il est facile de montrer que $\|f_n\|_1 \to 0$ et donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien convergente vers la fonction nulle pour $||\cdot||_1$, qui est bien dans $C([0,1])$.

On passe maintenant à montrer la complétude de certains espaces de dimension infinie.

Proposition 4.12. *L'evn $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.*

Démonstration. Soit $(u^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \ell^\infty(\mathbb{R})$ une suite de Cauchy. On remarque que chaque u^k est une suite, qu'on notera

$$u^k = (u^k_n)_{n\in\mathbb{N}}. \tag{4.11}$$

Le fait que $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit de Cauchy s'exprime par

$$\forall\varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad \|u^k - u^\ell\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall k > K, \ell \in \mathbb{N}. \tag{4.12}$$

On rappelle que $\|u^k - u^\ell\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u^k_n - u^\ell_n|$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé on a $|u^k_n - u^\ell_n| \leq \|u^k - u^\ell\|_\infty$. Donc,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad |u^k_n - u^\ell_n| \leq \varepsilon \quad \forall k, \ell > K, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.13}$$

i.e., pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $(u^k_n)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$. Puisque $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$ est complet, il existe u^∞_n tel que $u^k_n \to u^\infty_n$ pour $k \to +\infty$.

On a donc identifié une candidat limite : la suite $u^\infty = (u^\infty_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour montrer que $u^p \to u^\infty$ dans $\ell^\infty(\mathbb{R})$, on commence par montrer que $u^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{R})$. Par (4.13), en passant à la limite pour $k \to +\infty$ on obtient que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists K > 0 \quad \text{t.q.} \quad |u^\infty_n - u^\ell_n| \leq \varepsilon \quad \forall \ell \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.14}$$

Donc, $(u^\infty - u^\ell) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$. Comme $\ell^\infty(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel et $u^\ell \in \ell^\infty(\mathbb{R})$, on a $u^\infty = (u^\infty - u^\ell) + u^\ell \in \ell^\infty(\mathbb{R})$.

Finalement, le fait que $u^k \to u^\infty$ pour $k \to +\infty$, suit en passant au sup pour $n \in \mathbb{N}$ dans (4.14). En effet, on a le droit de le faire car K ne dépend pas de n. $\square$

Remarque 4.3. Cette méthode est assez générale. L'idée est de considérer une suite de Cauchy de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ et d'essayer de se ramener à une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ (ou un autre espace complet). Ensuite, on utilise le fait que $\mathbb{R}$ est un espace complet, ce qui nous fournit une première notion de convergence. Il reste ensuite à déduire de cette information (lorsque cela est possible) que la suite de Cauchy de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ converge au sens de la norme dont $\ell^\infty(\mathbb{R})$ est muni et que sa limite est bien dans $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

La preuve du résultat suivant est similaire.

Proposition 4.13. *L'evn* $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ *est complet.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Alors,

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad \|f_n - f_m\|_\infty \le \varepsilon \quad \forall n, m \ge N. \tag{4.15}$$

Par conséquent, il est immédiat que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad |f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon \quad \forall n, m \ge N, \quad \forall x \in [0,1]. \tag{4.16}$$

Cette inégalité traduit le fait qu'à $x \in [0,1]$ fixé, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$. Par conséquent, puisque $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$ est complet, cette suite est convergente dans $\mathbb{R}$. On note $f(x)$ sa limite, ce qui définit une application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Comme dans le cas précédent il nous reste à montrer que $f \in C([0,1])$ et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f par rapport à $\|\cdot\|_\infty$. La deuxième assertion est presque immédiate car $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Donc, on peut faire tendre m vers l'infini dans (4.16) et passer au sup pour $x \in [0,1]$ pour obtenir

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \quad \forall n \ge N. \tag{4.17}$$

Il reste à montrer que $f \in C([0,1])$. À cet effet, on se donne $x_0 \in [0,1]$ et on montre que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Observons que, grace à l'inégalité triangulaire, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\le 2 \sup_{y\in[0,1]} |f_n(y) - f(y)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Par continuité de f_n, on a que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si } |x - x_0| \le \delta. \tag{4.19}$$

Soit maintenant $n \ge N$, donné par (4.17) avec $\epsilon/3$. En revenant à (4.18), on a donc démontré que pour tout $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x) - f(x_0)| \le \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad \text{si } |x - x_0| \le \delta. \tag{4.20}$$

En particulier, $f \in C([0,1])$ et clot la démonstration. □

4.2 Théorème du point fixe de Picard

Lorsque on a une application $f : X \to X$, est naturel et très important de comprendre si f admet des points fixes, *i.e.*, si $f(x_\star) = x_\star$ pour un certain $x_\star \in X$. Dans cette section, on montrera une condition suffisante pour l'existence (et l'unicité) d'un tel point fixe, et on donnera une application concrète de ce résultat.

4.2.1 Énoncé du Théorème

Donnons au préalable la notion suivante.

Définition 4.3. Soit (X, d) un espace métrique. Une application $f : (X, \mathrm{d}) \to (X, \mathrm{d})$ est dite *contractante* si elle est Lipschtzienne de constante de Lipschitz strictement plus petite que 1, autrement dit s'il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que

$$\mathrm{d}(f(x), f(x')) \leq \alpha \mathrm{d}(x, x'), \qquad \forall x, x' \in X. \tag{4.21}$$

On a donc le théorème suivant, appelé théorème du point fixe de Picard, ou parfois de Banach.

Théorème 4.14 (Point fixe pour applications contractantes)**.** *Soit* (X, d) *un espace métrique* complet *et soit* $f : (X, \mathrm{d}) \to (X, \mathrm{d})$ *une application contractante. Alors, il existe et il est unique* $x_\star \in X$ *tel que* $f(x_\star) = x_\star$*.*

Démonstration. On démontre d'abord que l'éventuel point fixe $x_\star \in X$ est unique. Pour ce faire, on suppose qu'il existe $x, x' \in X$ tels que $f(x) = x$ et $f(x') = x'$. Comme f est contractante, on a donc

$$0 \leq \mathrm{d}(x, x') = \mathrm{d}(f(x), f(x')) \leq \alpha \mathrm{d}(x, x'). \tag{4.22}$$

Le fait que $\alpha < 1$ implique donc que $\mathrm{d}(x, x') = 0$ et donc que $x = x'$.

On passe maintenant à démontrer l'existence du point fixe. Soit $x_0 \in X$ un point quelconque, et définissons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la recurrence $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. On vise à montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe. Pour ce faire, on commence par montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Soit $k \in \mathbb{N}$ et calculons

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x_k, x_{k+1}) &= \mathrm{d}(f(x_{k-1}), f(x_k)) \\ &\leq \alpha \mathrm{d}(x_{k-1}, x_k) \\ &= \alpha \mathrm{d}(f(x_{k-2}), f(x_{k-1})) \\ &\leq \alpha^2 \mathrm{d}(x_{k-2}, x_{k-1}) \\ &\;\;\vdots \\ &\leq \alpha^k \mathrm{d}(x_0, x_1). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Donc, par l'inégalité triangulaire, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathrm{d}(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{\ell=0}^{p-1} \mathrm{d}(x_{n+\ell}, x_{n+\ell+1}) \leq \sum_{\ell=0}^{p-1} \alpha^{n+\ell} \mathrm{d}(x_0, x_1) \tag{4.24}$$

Puisque $\alpha < 1$, on a que $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha^\ell = 1/(1-\alpha)$. On peux donc continuer le calcul ci-dessus et obtenir

$$\mathrm{d}(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \mathrm{d}(x_0, x_1), \qquad \forall n, p \in \mathbb{N}. \tag{4.25}$$

Comme $\alpha^n \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$, on a donc montré que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy en utilisant la Proposition 4.4.

Puisque X est complet, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers un point $x_\star \in X$. Il reste à montrer que $x_\star$ est un point fixe de f. Ceci suit aisément du fait que, par continuité de f et de d,

$$\mathrm{d}(x_\star, f(x_\star)) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(x_\star, f(x_n)) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(x_\star, x_{n+1}) = \mathrm{d}(x_\star, x_\star) = 0. \qquad \square$$

Remarque 4.4. Une conséquence de la démonstration, est que, sous les hypothèses du théorème, pour tout $x_0 \in X$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, est convergente vers l'unique point fixe $x_\star$ de f. En passant à la limite pour $p \to +\infty$ dans (4.25), il est même possible quantifier la vitesse de convergence :

$$\mathrm{d}(x_n, x_\star) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\mathrm{d}(x_0, f(x_0)), \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.26}$$

Une telle convergence est appelée “superlinéaire”.

4.2.2 La suite de Fibonacci et le nombre d'or

Donnons une application du théorème du point fixe de Picard. On rappelle que la *suite de Fibonacci* est la suite de nombres naturels $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ définie par la relation de recurrence suivante :

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1, \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.27}$$

On a donc $u = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$.

On veut montrer la proposition suivante.

Proposition 4.15. *On a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \phi, \quad \text{où } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ est le nombre d'or.} \tag{4.28}$$

Démonstration. Un raisonnement par récurrence permet de montrer que la suite de Fibonacci est une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs, et donc que $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ puisqu'elle ne peut pas stationner au bout d'un certain rang. En posant $v_n = u_{n+1}/u_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, on commence donc par démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Par définition de u_n, on a que

$$v_1 = 1, \qquad v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{4.29}$$

Autrement dit, on a $v_{n+1} = f(v_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, où $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}. \tag{4.30}$$

L'idée est de trouver un intervalle fermé $I \subset \mathbb{R}$ tel que

1. $f(I) \subset I$, et donc on peut considerer $f : I \to I$;
2. $f : (I, \mathrm{d_s}) \to (I, \mathrm{d_s})$ est contractancte ;
3. il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n_0} \in I$.
4. $\phi \in I$.

En effet, cela nous permettra d'appliquer le théorème du point fixe et la Remarque 4.4 pour démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le seul point fixe de f dans I, qu'on devra calculer explicitement.

On remarque que trivialement, $\phi \in [3/2, 2]$. Montrons donc que $I = [3/2, 2]$ satisfait les propriétés souhaitées. Nous commençons par observer que f est de classe C^1 sur I et que $f'(x) = -1/x^2$ pour tout $x \neq 0$. En particulier, f est décroissante et donc $f(I) \subset [f(2), f(3/2)] = [3/2, 5/3] \subset I$. Ceci montre la propriété 1. De plus, comme si $\varepsilon > 0$ on a $|f'(x)| \leq 1/\varepsilon^2 < 1$ pour tout $x \in [1+\varepsilon, +\infty[$, l'inégalité des accroissements finis nous donne que $f : (I, \mathrm{d_s}) \to (I, \mathrm{d_s})$ est contractante. On a donc la propriété 2. Finalement, on a $v_2 = 2 \in I$, ce qui montre la propriété 3.

Par le théorème du point fixe on a donc que $v_n \to \phi \in I$ où $f(\phi) = \phi$. Cette propriété est équivalente au fait que

$$\phi^2 = \phi + 1. \tag{4.31}$$

En calculant explicitement les racines de cette équation polynomiale d'ordre 2 (qui sont $(1 \pm \sqrt{5})/2$), on se rend compte que la seule solution positive de cette equation est le nombre d'or, ce qui clot la démonstration. □

4.3 Exercices

Suites de Cauchy

Exercice 4.1. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : (X, \mathrm{d}_X) \to (Y, \mathrm{d}_Y)$ une fonction uniformément continue. Montrer que si $(x_n)_n \subset X$ est une suite de Cauchy, il en est de même pour $(f(x_n))_n \subset Y$.

Exercice 4.2. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ est de Cauchy si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{d}(x_n, x_{n+1}) < +\infty. \tag{4.32}$$

La réciproque est-elle vraie ?

Espaces complets

Exercice 4.3. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application injective, et d la distance induite (*cf.* Exercice 1.2) : $\mathrm{d}(x, y) = ||f(x) - f(y)||_2$.

1. Donner un exemple de telle fonction.
2. Donner une CNS sur l'image de f pour que $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$ soit complet.

Exercice 4.4. Le but de cet exercice est de montrer que l'evn $(C([-1,1]), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet (en fait, un raisonnement similaire permettrait de montrer que $(C([0,1]), \|\cdot\|_p)$ n'est pas complet pour $p < \infty$, en utilisant un changement de variable affine entre le segment $[-1,1]$ et le segment $[0,1]$).

On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([-1,1])$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < -\frac{1}{n}, \\ nx & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases} \tag{4.33}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il n'existe pas de $g \in C([-1,1])$ tel que $f_n \to g$ pour $n \to +\infty$.

Exercice 4.5. Montrer que $(\ell^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ est complet si $p < +\infty$.

Exercice 4.6. On considère les espaces vectoriels suivants :

$$E_k = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \mid \sum_{n=1}^{+\infty} n^k |x_n| < +\infty \right\}, \qquad k \in \mathbb{N}^*. \tag{4.34}$$

1. Montrer que la fonction suivante est une norme sur E_k, $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\|x\|_k = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k |x_n|; \tag{4.35}$$

2. Montrer que E_{k+1} est un sev dense et propre de $(E_k, \|\cdot\|_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$;
3. En déduire que $(E_{k+1}, \|\cdot\|_k)$ n'est pas un espace de Banach pour tout $k \in \mathbb{N}^*$;
4. Montrer que $(E_k, \|\cdot\|_k)$ est un espace de Banach pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4.7. Soit (X, d) un espace métrique. Si (X, d) est complet et $(\bar{B}_n)_n$ est une suite de boules fermées $\bar{B}_n = \bar{B}(x_n, r_n)$ tels que $\bar{B}_{n+1} \subset \bar{B}_n$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, montrer que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{B}_n \neq \varnothing. \tag{4.36}$$

Prouver que cette condition est équivalente à la complétude de (X, d).

Exercice 4.8. Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, et $A \subset E$ une partie dense de E.

1. Montrer que si $f : A \to F$ est continue, et si pour tout $x \in E \setminus A$, $\lim_{y\to x, y\in A} f(y)$ existe, alors il existe une unique fonction $g : E \to F$, continue, qui prolonge f au sens où $g_{|A} = f$.
2. On suppose maintenant que F est complet. Montrer que si $f : A \to F$ est uniformément continue, alors il existe une unique fonction $g : E \to F$, uniformément continue, qui prolonge f au sens où $g_{|A} = f$.

Exercice 4.9.

Le théorème de point fixe et ses applications

Exercice 4.10. Définir deux applications $T, R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que

$$|T(x) - T(y)| < |x - y|, \qquad |R(x) - R(y)| \geq 2|x - y|, \tag{4.37}$$

mais avec aucun point fixe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.11 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** L'application classique du théorème de point fixe est le résultat suivant.

Théorème 4.16 (Cauchy-Lipschitz)**.** *Soit $G \subset \mathbb{R}^2$ ouvert (pour la norme $\||\cdot||_2$) et $f : G \to \mathbb{R}$ continue. Étant donné $(x_0, t_0) \in G$, considèrons l'équation différentielle suivante :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{EDO}$$

Supposons, de plus, que f soit lipschitzienne en la premiere variable, uniformément par rapport à la deuxième, au sens où on suppose qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| \leq M|x_1 - x_2|, \qquad \forall x_1, x_2, t \quad t.q. \quad (x_1, t), (x_2, t) \in G. \tag{4.38}$$

Alors, il existe une unique solution $t \mapsto x(t)$ à (EDO)*, définie dans un voisinage de t_0.*

Nous allons démontrer ce théorème.

1. Montrer que résoudre (EDO) est équivalent à l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(t), t)\, dt. \tag{4.39}$$

2. Montrer qu'il existe un ouvert $G' \subset G$ tel que $(x_0, t_0) \in G'$, et $K > 0$ tels que $|f(x, t)| \leq K$ pour tout $(x, t) \in G'$. Montrer que G' contient un produit de la forme $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \times [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, pour des $\eta, \delta > 0$ suffisamment petits.
   On pose $I = [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ et $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.
3. Soit $C(I; J) = \{\varphi : I \to J \mid \varphi \text{ est continue}\}$. Montrer qu'il s'agit d'un espace de Banach par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur I.
4. Considérons l'application T définie par $T\varphi = \psi$ où

$$\psi(t) = t_0 + \int_{t_0}^{t} f(\varphi(t), t)\, dt. \tag{4.40}$$

   Montrer que $T\varphi \in C(I; J)$ si $\varphi \in C(I; J)$ si $\delta \leq \eta/K$.
5. Montrer que T est une contraction si on impose $M\delta < 1$.
6. Conclure.

Exercice 4.12. Considerons l'application $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ defini par

$$Tf(x) := \int_0^x t^2 f(t)\,dt + \frac{1}{2}, \qquad \forall f \in C([0,1]). \tag{4.41}$$

1. Montrer que T est une application contractante par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$ et en deduire qu'elle admet un point fixe $f_0 \in C([0,1])$;
2. Montrer que $\|f_0\| \leq 1$.

Exercice 4.13. Soit (X, d) un espace métrique complet. Pour $f : (X, \mathrm{d}) \to (X, \mathrm{d})$ et $n \in \mathbb{N}$ on note $f^n(x) = f \cdot \ldots \cdot f(x)$ l'n-éme itérée de f. Montrer que s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que f^n est contractante, alors il existe et il est unique $x_\star \in X$ tel que $f(x_\star) = x_\star$.

Exercice 4.14. Soit $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi \in C([0,1])$.

1. Montrer que pour $\lambda > 0$ assez petit, il existe un unique $f \in C([0,1])$ tel que

$$f(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y) f(y)\,dy + \varphi(x). \tag{4.42}$$

2. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ il existe un unique $f \in C([0,1])$ tel que

$$f(x) = \lambda \int_0^x K(x,y) f(y)\,dy + \varphi(x). \tag{4.43}$$

Exercice 4.15 (Cas particulier du théorème de point fixe de Brouwer)**.** Considérons $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d_s})$. Soit $f : B(0,1) \to B(0,1)$ telle que $\mathrm{d_s}(f(x), f(y)) \leq \mathrm{d_s}(x,y)$ pour tout $x, y \in B(0,1)$. Montrer que alors f a un point fixe dans $B(0,1)$.

5 Compacité

La notion de compacité est absolument fondamentale en analyse. Elle permet en effet de démontrer l'existence de certaines limites (par le théorème de Bolzano-Weiestrass), mais aussi l'existence de solutions à des problèmes d'optimisation (minimisation ou maximisation de fonctions sur un compact par le théorème dit "des bornes atteintes"). Pour les evn de dimension finie, on arrivera à caractériser de manière explicite toutes les parties compactes comme étant les parties fermées et bornées. En dimension infinie, la principale difficulté provient du fait qu'en dimension infinie, les ensembles fermés et bornées ne sont pas nécessairement compacts. Or, les espaces de suites ou de fonctions fonctions usuels, par exemple, sont toujours de dimension infinie !

5.1 Compacité au sens de Bolzano-Weierstrass

5.1.1 Le cas réel

5.1.2 Définition et premières propriétés

On rappelle le résultat suivant, déjà vu l'année passée, et valable dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$.

Théorème 5.1 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite bornée de réels admet une sous-suite convergente.*

Démonstration. Elle est totalement similaire à la preuve du Théorème 4.5 : on peut extraire d'une suite bornée une sous-suite monotone et bornée, qui converge donc par le théorème de la limite monotone. □

En fait, la propriété de Bolzano-Weierstrass est tellement importante qu'elle inspire une définition.

Définition 5.1. Soit (X, d) un espace métrique. Une partie $A \subset X$ est *compacte* au sens de Bolzano-Weierstrass (BW dans la suite) si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite convergente dans A. On dit que (X, d) est un espace métrique compact si X est lui-même une partie compacte de X.

Exemple 5.1. Tout intervalle fermé et borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$, est compact au sens de BW dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$. En effet, toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$ admet une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente vers $x_\infty \in \mathbb{R}$, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, puisqu'une telle suite est bornée. Comme $[a, b]$ est fermé, on a donc que $x_\infty \in [a, b]$.

Attention, cela ne signifie pas que toute suite converge ! On se convaincra aisément que dès qu'un espace métrique compact au sens de BW a plus de deux éléments, on peut créer une suite qui ne converge pas.

Exemple 5.2. On vérifie aisément que $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$ n'est pas un espace compact au sens de BW. En effet, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, n'admet pas de sous-suites convergentes. En effet, toute suite extraite sera non-borné et donc non-convergente.

Pour se simplifier la suite, on va donner un nom aux limites possibles de sous-suites d'une suite.

Définition 5.2. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A et $l \in X$. On dit que l est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vcers l.

Exemple 5.3. $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a deux valeurs d'adhérence, 1 et -1.

Proposition 5.2. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Alors, une partie finie* $A \subset X$ *est compacte au sens de BW . De plus, si* $\mathrm{d} = \mathrm{d}_{discr}$ *est la distance discrète, les partie finies de* X *sont les seules parties compactes au sens de BW .*

Démonstration. Soit $A \subset X$ une partie *finie* de X. Montrons que A est compacte au sens de BW. En effet, si $(x_n)_{n\subset\mathbb{N}} \subset A$ est une suite de A, le principe de tiroirs implique qu'il existe une partie infinie $P \subset \mathbb{N}$ et $x_\infty \in A$ tels que $x_n = x_\infty$ si $n \in P$. Ordonner $P = (n_0, n_1, \ldots, n_k, \ldots)$ nous permet donc d'extraire la sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\subset\mathbb{N}}$, qui est constante et donc convergente.

Supposons maintenant que $\mathrm{d} = \mathrm{d_{discr}}$ et choisissons une partie $A \subset X$ non-finie. Ceci implique qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ telle que $x_n \neq x_m$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Mais alors, $\mathrm{d}(x_n, x_m) = 1$ si $n \neq m$. Comme cette propriété reste vraie pour toute sous-suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, aucun entre elle pourra être de Cauchy. En particulier, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suites convergentes et donc A n'est pas compacte. □

On commence par montrer deux propriétés essentielles de la compacité.

Proposition 5.3. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $A \subset X$ *une partie compacte au sens de BW. Alors,* A *est fermée et bornée.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ telle que $x_n \to x_\infty \in X$. Par définition de partie compacte au sens de BW, il est possible d'extraire une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élement $a_\infty \in A$. Par la Proposition 3.4 on obtient donc que $x_\infty = a_\infty \in A$ et, par consequent, que A est fermé par caractérisation séquentielle des fermés.

Supposons maintenant que A ne soit pas borné, *i.e.*que $\operatorname{diam} \mathrm{d}(x, y) = +\infty$. Par définition du diamètre, pour tout $x_0 \in A$ et $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in A$ tel que $\mathrm{d}(x_n, x_0) \geq n$. Par compacité au sens de BW, il existe donc une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x_\infty \in A$. Toutefois ceci est absurde, en effet,

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(x_n, x_\infty) \geq \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(x_n, x_0) - \mathrm{d}(x_0, x_\infty) \geq \lim_{n\to+\infty} n - \mathrm{d}(x_0, x_\infty) = +\infty. \quad \square$$

On verra que cette proposition sera en fait une équivalence dans le cas des evn de dimension finie. Il faut quand même faire attention, car l'implication inverse est fausse en générale, comme on le montre ici.

Exemple 5.4. Soit $(X, \mathrm{d}_{\text{discr}})$ un espace métrique de cardinal infini. Il est évident que toute partie de X est borné, et il suit de l'Exemple 2.4 que toute partie de X est fermé. Donc, par la Proposition 5.2, toute partie de X non finie est bornée et fermée, mais non compacte au sens de BW, comme expliqué à la Proposition 5.2.

Proposition 5.4. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $A \subset X$ *une partie compacte au sens de BW. Soit* $B \subset A$. *Alors* B *est compacte au sens de BW si et seulement si* B *est fermée dans* $(A, \mathrm{d}_{|A})$.

Démonstration. Commençons par le sens direct. Si B est compacte au sens de BW dans X, elle est fermée dans X, donc $B \cap A$ est fermée dans A, mais $B \cap A = B$ puisque $B \subset A$, donc B est fermé dans A.

Regardons maintenant le sens réciproque. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B \subset A$ admet une sous-suite convergente dans A, par compacité au sens de BW de ce dernier. Comme B est fermé, cette limite appartient à B, qui est donc compact au sens de BW. □

Donnons maintenant deux propriétés concernant l'intersection et l'union de compacts.

Proposition 5.5. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Toute union finie de parties compactes au sens de BW de* X *est compacte au sens de BW. Toute intersection quelconque de parties compactes au sens de BW est compacte.*

Remarque 5.1. Bien sûr, une union infinie de parties compactes au sens de BW n'est pas nécessairement compacte au sens de BW. En effet, elle n'est même pas forcément bornée (prendre par exemple $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_s)$ et les parties compactes au sens de BW $\{\mathrm{n}\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, dont l'union n'est pas bornée).

Démonstration. Commençons par la propriété sur l'union. Comme d'habitude, on se ramène à regarder $A_1 \cup A_2$, avec A_1 et A_2 deux parties compactes au sens de BW de (X, d), le cas général s'en déduisant à l'aide d'une récurrence triviale. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $A_1 \cup A_2$.

Clairement, soit il existe une infinité de n pour lesquels $x_n \in A_1$, soit il existe une infinité de n pour lesquels $x_n \in A_2$. Traitons le premier cas : il existe une extraction φ telle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $x_{\varphi(n)} \in A_1$. On pose $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$. C'est une suite de A_1 qui est compact au sens de BW, on peut donc trouver $y \in A_1 \subset A_1 \cup A_2$ et ψ une extraction telle que $y_{\psi(n)} \to y$. On remarque alors que $x_{\varphi(\psi(n))} \to y$, *i.e.* $x_{\varphi\circ\psi(n)} \to y$. $\varphi \circ \psi$ étant une extraction (on parle d'extractions successives), on a donc bien trouvé une suite extraite qui converge vers un élement $y \in A_1 \cup A_2$.

Maintenant, démontrons la propriété pour l'intersection. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une collection quelconque de parties compactes au sens de BW de (X, d). Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $\cap_{i\in I} A_i$. Notamment, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de A_1, on peut donc trouver $x \in A_1$ et φ une extraction telle que $x_{\varphi(n)} \to x$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{\varphi(n)} \in \cap_{i\in I} A_i$. Les A_i étant compacts au sens de BW, ils sont fermés, et donc $\cap_{i\in I} A_i$ est aussi fermé. Par caractérisation séquentielle des fermés, on en déduit que $x \in \cap_{i\in I} A_i$, ce qui conclut la preuve. □

Dans le cas où une suite vit dans un compact au sens de BW, on peut donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite converge.

Proposition 5.6. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $A \subset X$ *une partie compacte au sens de BW. Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite d'éléments de* A*. Alors* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.*

Démonstration. Le sens direct est vrai en toute généralité, par la Proposition 3.4. C'est pour le sens réciproque que l'on a besoin de la compacité. Prenons donc une suite de A qui admet une unique valeur d'adhérence notée l, et supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l. En prenant la contraposée de la définition de la limite, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que $d(l, x_n) \geqslant \varepsilon$. Pour $N = 0$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que $d(l, x_{n_0}) \geqslant \varepsilon$. Pour $N = n_0 + 1$, il existe $n_1 \geqslant n_0 + 1 > n_0$ tel que $d(l, x_{n_1}) \geqslant \varepsilon$. Par récurrence, on construit donc une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $d(x_{n_k}, l) \geqslant \varepsilon$. On pose $y_k = x_{n_k}$. Alors $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de A qui est compact au sens de BW, on peut donc en extraite une sous suite $y_{\varphi(k)}$ qui converge vers un certain $l' \in A$. De plus, en passant à la limite dans l'inégalité $d(y_{\varphi(k)}, l) \geqslant \varepsilon$, on obtient $d(l', l) \geqslant \varepsilon$ et donc $l \neq l'$. Ceci est impossible, car $(y_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et toutes les sous-suites convergentes sont censées converger vers l. D'où le résultat voulu. □

Attention, ce résultat est complètement faux si la partie A n'est pas supposée compacte au sens de BW.

Exemple 5.5. On se place dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_s)$ et on considère la suite donnée par $x_{2n} = 1$ et $x_{2n+1} = n$. Cette suite n'est pas convergente car elle n'est pas bornée. Toutefois, elle admet une unique valeur d'adhérence. En effet, 1 est clairement une valeur d'adhérence, en prenant comme suite extraite les termes pairs. C'est la seule. En effet, si on prend une extraction $\varphi(n)$. De deux choses l'une :

- Soit $\varphi(n)$ ne contient que des valeurs paires à partir d'un certain rang, la suite est alors stationnaire à 1, elle converge donc vers 1.
- Soit $\varphi(n)$ contient une infinité de termes impairs, auquel cas la suite extraite correspondante n'est pas bornée, donc pas convergente.

On termine cette partie en remarquant le lien entre complétude et compacité.

Proposition 5.7. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $A \subset X$ *une partie compacte au sens de BW. Alors,* $(A, \mathrm{d}_{|A})$ *est un espace métrique complet.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ une suite de Cauchy. Par compacité de A elle admet donc une sous-suite convergente dans A, ce qui entraine que toute la suite est convergente dans A grace à la Proposition 4.3. □

5.2 Continuité et compacité au sens de Bolzano-Weierstrass

Dans cette partie, nous commençons par étudier les images de compacts au sens de BW par des applications continues. Nous allons étudier en suite le lien entre compacité eu sens de BW et continuité uniforme.

Proposition 5.8. *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques, et* $f : X \to Y$ *une application continue. Soit* $A \subset X$ *une partie compacte au sens de BW. Alors,* $f(A)$ *est une partie compacte au sens de BW de* Y*.*

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $f(A)$. Alors, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A telle que $f(x_n) = y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par compacité de A au sens de BW, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers $x_\infty \in A$. Par continuité de f, on a donc que $f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to f(x_\infty) \in f(A)$. Ceci montre que la sous-suite $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc $f(A)$ est compact au sens de BW. □

Attention, la réciproque est fausse.

Exemple 5.6. On considère $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_s)$ et $f(x) = 0$ pour $x \geqslant 0$ et $f(x) = 1$ pour $x > 0$. $[-1, 1]$ est compact, $f([-1, 1]) = 0, 1\}$ qui est compact au sens de BW comme ensemble fini, mais f n'est clairement pas continue (la limite à gauche et à droite en 0 n'est pas la même).

Corollaire 5.9. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Si* $A \subset X$ *est une partie compacte au sens de BW, il existe* $x_m, x_M \in A$ *tels que*

$$f(x_m) = \min_{x\in A} f(x) \qquad \textit{et} \qquad f(x_M) = \max_{x\in A} f(x). \tag{5.1}$$

Démonstration. À cause de la Proposition 5.8, $f(A)$ est compact et donc borné et fermé. Soit $M = \sup f(X)$. Comme $f(A)$ est borné, on a $M < +\infty$. De plus, par les propriétés du sup, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $y_\varepsilon \in X$ tel que $M - \varepsilon \leq y_\varepsilon \leq M$. En choisissant $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \ldots$ on obtient donc une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(A)$ telle que $y_n \to M$. Comme $f(A)$ est fermé, on a donc que $M \in f(A)$. Donc il existe x_M tel que $f(x_M) = \max_{x\in A} f(x)$. De même pour le minimum. □

Théorème 5.10 (Théorème de Heine)**.** *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques, et* $f : X \to Y$ *une application continue. Si* X *est compact, alors* f *est uniformément continue.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, en supposant que f ne soit pas uniformément continue. C'est à dire, on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \eta > 0,\ \exists (x, y) \in X \times X \text{ t.q. } \mathrm{d}_X(x, y) \leq \eta \text{ et } \mathrm{d}_Y(f(x), f(y)) \geq \varepsilon. \tag{5.2}$$

On peut donc construire, en faisant successivement prendre à η les valeurs $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, une suite $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset X \times X$ telle que $\mathrm{d}_X(a_n, b_n) \leq \frac{1}{n}$ et $\mathrm{d}_Y(f(a_n), f(b_n)) \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le produit de compacts étant encore compact, on en déduit que $X \times X$ est compact. Donc, il existe une sous-suite $((a_{n_k}, b_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $(a_\infty, b_\infty) \in X \times X$, autrement dit $a_{n_k} \to a_\infty$ et $b_{n_k} \to b_\infty$. Mais puisque $\mathrm{d}_X(a_{n_k}, b_{n_k}) \leq 1/n_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que $a_\infty = b_\infty$. Par continuité de f on a donc

$$\lim_{k\to+\infty} f(a_{n_k}) = f(a_\infty) = f(b_\infty) = \lim_{k\to+\infty} f(b_{n_k}). \tag{5.3}$$

Une passage à la limite dans l'inégalité $\mathrm{d}_Y(f(a_{n_k}), f(b_{n_k})) \geq \varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, conduit donc à l'inégalité $0 \geq \varepsilon$, qui est absurde. Donc, f est uniformément continue sur X. □

Enfin, donnons une application intéressante des propriétés précédentes, en exemple.

Exemple 5.7. Soit (X, d) un espace métrique compact au sens de BW, (Y, d') un autre espace métrique, et $f : X \to X'$, continue et bijective. Alors f est un homéomorphisme. En effet, si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de Y telle que y_n converge vers un certain $y \in Y$, f étant bijective, il existe des éléments x_n et x de X tels que $y_n = f(x_n)$ et $y = f(x)$. X étant compact, il existe une extraction φ et $x' \in X$ tels que $x_{\varphi(n)} \to x'$. f étant continue, $f(x_{\varphi(n)}) \to f(x')$. Une sous-suite d'une suite convergente tendant vers la même limite, on sait aussi que $f(x_{\varphi(n)}) = y_{\varphi(n)} \to y$. Par unicité de la limite, $f(x') = y = f(x)$. f étant injective, on a donc que $x = x'$. On remarque que le raisonnement précédent s'applique à n'importe quelle sous-suite convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On en déduit donc que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'un ensemble compact qui admet une unique valeur d'adhérence, elle converge donc vers cette valeur d'adhérence.

5.3 Compacité au sens de Borel-Lebesgue, précompacité, séparabilité

Dans cette section, on va donner une autre caractérisation de la compacité, qui ne fait pas appel à la notion de suite est qui est donc en un certain sens plus "topologique".

5.3.1 Précompacité

On commence par la définition suivante.

Définition 5.3. Un espace métrique (X, d) est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une quantité *finie* de points $x_1, \dots, x_n \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon). \tag{5.4}$$

On dit qu'une partie A de X est précompacte si $(A, \mathrm{d}_{|A})$ est précompact.

Dans le cas d'une partie A de X, il sera souvent plus commode d'utiliser la caractérisation suivante, qui évite d'utiliser la topologie induite.

Proposition 5.11. *Une partie A d'un espace métrique (X, d) est précompacte si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des points $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon)$.*

Démonstration. Supposons que A soit précompacte. Soit $\varepsilon > 0$. Comme on travaille avec la topologie induite, il existe des points $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (B(a_i, \varepsilon) \cap A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \varepsilon).$$

D'où le résultat voulu. Inversement, soit $\varepsilon > 0$, et des points $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon)$. Clairement,

$$A = \bigcup_{i=1}^n \left(B(a_i, \varepsilon) \cap A\right),$$

donc A est bien précompact. $\square$

Exemple 5.8. Dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_s)$, l'ensemble $]0,1[$ est précompact. En effet, si on se donne un $\varepsilon > 0$, il existe un certain $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$. Alors on se convainc aisément que $]0,1[\subset \bigcup_{k=0}^{2n-1}]\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n}[$.

Nous utiliserons par la suite la propriété suivante.

Proposition 5.12. *Si un espace métrique* (X, d) *est* précompact*, alors il est borné.*

Démonstration. Soit $x \in X$ et $x_0 \in X$ un élément fixé. Il existe alors $k \in \mathbb{N}^*$ et $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que $x \in B(x_k, \varepsilon)$ et $x_0 \in B(x_{k_0}, \varepsilon$. Une suite d'inégalités triangulaires donne donc que

$$\mathrm{d}(x, x_0) \leqslant \sum_{i=1}^{\max(k,k_0)} d(x_i, x_{i+1}) \leqslant \max(k, k_0)\varepsilon \leqslant n\varepsilon.$$

On a donc que $x \in B(x_0, n\varepsilon)$. D'après l'Exercice 2.1, X est donc borné. $\square$

Attention, toute partie bornée n'est en général pas forcément précompacte (ce sera vrai pour les evn de dimension finie toutefois), comme le montre les deux exemples suivants.

Exemple 5.9. Prenons un espace $(X, \mathrm{d}_{\mathrm{discr}})$ où $\mathrm{Card}(X) = +\infty$. Comme $\mathrm{diam}(X) = 1$ par définition de la distance discrète, X est bornée et donc toute sous-partie est bornée. De plus, on peut montrer que les parties précompactes sont les parties de cardinal fini. En effet, une partie A de cardinal fini est toujours précompacte, puisque si $A = \{a_1, \dots a_n\}$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $A \subset \cup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon)$. Inversement, si A est précompacte, en prenant $\varepsilon = 1/2$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots a_n \in A$ tels que $A \subset \cup_{i=1}^n B(a_i, 1/2)$. Par définition de la distance discrète, on a $B(a_i, 1/2) = \{a_i\}$ et donc $A \subset \cup_{i=1}^n \{a_i\}$, A est donc de cardinal fini.

Ainsi, toute partie de cardinal infini de X est bornée sans être précompacte.

Exemple 5.10. Soit $(\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ et considérons la sphere unité $\mathcal{S} = \{x \in \ell^2(\mathbb{R}) \mid \|x\|_2 = 1\}$. Évidemment, $\mathcal{S}$ est borné. Montrons qu'elle n'est pas précompacte. À cet effet, on considère la suite $(e^j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathbb{R})$, où pour $j \in \mathbb{N}$ on pose $e^j = (e^j_n)_n \subset \mathbb{R}$ est donnée par

$$e^j_n = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.5}$$

On a que $(e_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ et que $\|e_j - e_i\|_2 = \sqrt{2}$ si $j \neq i$. Posons $\varepsilon < \sqrt{2}/2$ et supposons qu'il existe $x_1, \dots, x_n \in \ell^2(\mathbb{R})$ tels que

$$\mathcal{S} \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon). \tag{5.6}$$

(La famille $(e_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ est appelé la base canonique de $\ell^2(\mathbb{R})$, par analogie avec la base canonique dans $\mathbb{R}^n$). Comme les boules que l'on considère sont en nombre fini, il faut forcement que l'une entre eux contienne une infinité des e_i, et donc notamment deux e_i et e_j pour $i \neq j$. Il existe donc un certain $k \in \mathbb{N}$ tel que $e_i, e_j \in B(x_k, \varepsilon)$. Toutefois, ceci implique que

$$\|e_i - e_j\|_2 \leq \|e_i - x_k\|_2 + \|x_k - e_j\|_2 < 2\varepsilon < \sqrt{2}, \tag{5.7}$$

ce qui est absurde.

La propriété suivante sera utilisée par la suite.

Proposition 5.13. *Tout sous-ensemble d'un espace métrique précompact est précompacte.*

Démonstration. On sait que (X, d) est précompact. Soit $A \subset X$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une quantité finie de points $x_1, \dots, x_n \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon). \tag{5.8}$$

On en déduit que

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) \cap A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Ceci n'est pas suffisant pour conclure car les x_i ne sont pas forcément dans A. On procède de la manière suivante :

— Si $B(x_i, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, on ne fait rien.

— Si $B(x_i, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, on choisit un $a_i \in B(x_i, \varepsilon) \cap A$ quelconque. On note I l'ensemble des indices tels que $B(x_i, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Pour $i \in I$, on a alors que $B(x_i, \varepsilon) \subset B(a_i, 2\varepsilon)$. En effet, si $x \in B(x_i, \varepsilon)$, on a par inégalité triangulaire, puisque $a_i \in B(x_i, \varepsilon)$, que

$$d(x, a_i) \leqslant d(x, x_i) + d(x_i, a_i) \leqslant \varepsilon + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon,$$

donc $x \in B(a_i, 2\varepsilon)$. Ainsi, par définition de I, on a

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) \cap A = \bigcup_{i\in I} nB(x_i, \varepsilon) \cap A \subset \bigcup_{i\in I} nB(x_i, \varepsilon) \subset \bigcup_{i\in I} nB(a_i, 2\varepsilon).$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien que A est précompact. □

5.3.2 Espaces séparables

Définition 5.4. Un espace métrique (X, d) est dit séparable s'il est fini ou s'il admet un sous-ensemble dénombrable et dense, *i.e.* une suite dense de la forme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Donnons quelques exemples.

Exemple 5.11. 1. $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_s)$ est séparable car il admet $\mathbb{Q}$ comme sous-ensemble dénombrable dense.

2. De même, par exemple $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$ est séparable. En effet, $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable comme produit fini d'ensembles dénombrables, et il est dense. En effet, si $x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, pour tout $i \in [|1, n|]$, comme $x_i \in \mathbb{R}$, il existe $q_i \in \mathbb{Q}$ tel que $|x_i - q_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. On pose alors $q = (q_1, \dots q_n) \in \mathbb{Q}^n$. On a donc que

$$||x - q||_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - q_i|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n} \leqslant \varepsilon^2.$$

Par la caractérisation donnée à la Proposition 3.13, on en déduit que $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$.

3. Dans le même ordre d'idée, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ et $\mathbb{C}^n, ||\cdot||_2$ sont séparables (il suffit d'appliquer le raisonnement précédent aux parties réelles et imaginaires).

Il existe de larges classes d'espaces métriques séparables, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 5.14. *Tout espace métrique précompact est séparable.*

Démonstration. Si (X, d) est précompact, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ et une quantité finie de points $x_1^k, \dots, x_{n_k}^k \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n_k} B\left(x_i^k, \frac{1}{k}\right). \tag{5.9}$$

Posons alors

$$D = \cup_{k=1}^{+\infty} \cup i = 1 n_k x_i^k.$$

D est fini ou dénombrable comme réunion dénombrable d'ensemble finis. De plus, D est dense. En effet, soit $\varepsilon > 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand pour que $1/k_0 < \varepsilon$. Soit alors $x \in X$. Comme

$$X = \bigcup_{i=1}^{n_{k_0}} B\left(x_i^k, \frac{1}{k_0}\right), \tag{5.10}$$

il existe i_x tel que $x \in B\left(x_{i_x}^k, \frac{1}{k_0}\right)$. Notamment,

$$d(x, x_{i_x}^k) \leqslant \frac{1}{k_0} < \varepsilon.$$

Comme $x_{i_x}^k \in D$, on a donc bien que D est dense dans X. □

5.3.3 Compacité au sens de Borel-Lebesgue (BL)

Ici, nous allons introduire une autre notion de compacité, beaucoup plus "topologique", au sens où elle ne fait pas intervenir de notion de suite. Le but final est démontrer que la compacité au sens de BL est équivalente à la compacité au sens de BW. Commençons par la définition.

Définition 5.5. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est compact au sens de BL si la propriété de Borel-Lebesgue est satisfaite : "de tout recouvrement de A par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini". Autrement dit, si $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ pour une collection quelconques d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $i_1, \ldots, i_n \in I$ tels que $X = \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$.

Soit$A \subset X$. Alors, A est compact au sens de BL si la propriété de Borel-Lebesgue est satisfaite : "de tout recouvrement de A par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini". Autrement dit, si $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ pour une collection quelconques d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $i_1, \ldots, i_n \in I$ tels que $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$.

Remarque 5.2. Une remarque immédiate est que tout espace (ou toute sous-ensemble) (X, d) compact au sens de BL est précompact. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut toujours écrire que $X = \cup_{x\in X} B(x, \varepsilon)$. Les boules étant ouvertes, on a un recouvrement ouvert, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini : il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $i_1, \ldots, i_n \in I$ tels que $X = \bigcup_{k=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$, ce qui est la définition de la précompacité.

Dans le but de démontrer l'équivalence entre les deux notions de compacité, nous aurons besoin du résultat suivant.

Proposition 5.15. *Un espace métrique (X, d) est précompact si et seulement toute suite de Cauchy admet une sous-suite convergente.*

Démonstration. On commence par le sens direct. On suppose maintenant que (X, d) est précompact. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. En fixant $\varepsilon = 1$ dans la définition de précompacité, on obtient $y_{1,1}, \ldots, y_{1,N_1} \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{N_1} B(y_{1,i}, 1). \tag{5.11}$$

Il est clair qu'il existe k tel que la boule $B(y_{1,k_1}, 1)$ contient une infinité d'elements de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $E_1 = B(y_{1,k_1}, 1)$. E_1 inférieur à 2. Autrement dit, il existe une extraction $(\varphi_1(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $x_{\varphi_(n)} \in E_1$. Ensuite, on choisit $\varepsilon = 1/2$. E_1 étant séparable par la Proposition 5.14, on obtient $y_{2,1}, \ldots, y_{2,N_2} \in X$ tels que

$$E_1 \subset \bigcup_{i=1}^{N_2} B(y_{2,i}, 1/2). \tag{5.12}$$

Il est clair qu'il existe k tel que la boule $B(y_{2,k_1}, 1)$ contient une infinité d'elements de la suite $(x_{\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $E_2 = B(y_{2,k_1}, 1/2) \cap E_1$. On a alors $E_2 \subset E_1$. Autrement dit, il existe une extraction $(\varphi_2(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)} \in E_2$. On répète la procédure, et par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un ensemble E_k inclus dans une boule de rayon $1/2^k$ telle que pour tout $j < l$, on ait $E_l \subset E_j$, et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $x_{\varphi_1\circ\varphi_2\ldots\circ\varphi_k(n)} \in E_n$. On utilise alors ce qu'on appelle l'argument diagonal de Cantor : on pose $\varphi(n) = \varphi_1 \circ \varphi_2 \ldots \circ \varphi_n(n)$. Alors $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy. En effet, on a que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, en effectuant une suite d'inégalités triangulaires, puisque $E_{k+1} \subset E_k$ pour tout k,

$$d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n+p)}) \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} d(x_{\varphi(k)}, x_{\varphi(k+1)}) \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{2}{2^k} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{2}{2^k} = \frac{4}{2^n}.$$

La suite à droite tendant vers 0 quand $n \to \infty$, par la Proposition 4.4, on en déduit bien que cette sous-suite est de Cauchy. Pour le sens réciproque, on raisonne par contraposée. On suppose maintenant que (X, d) ne n'est pas précompact (*i.e.*, qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute partie finie $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ il existe un élément $x \in X$ tel que $\min_{i\in[\![1,n]\!]} \mathrm{d}(x, x_n) > \varepsilon$) et on trouve une suite qui n'admette aucune suite de Cauchy. Soit $x_1 \in X$. Comme $X \neq B(x_1, \varepsilon)$, il existe $x_2 \in X \setminus B(x_1, \varepsilon)$, donc tel que tel que $\mathrm{d}(x_2, x_1) \geqslant \varepsilon$. Comme $X \neq B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$, il existe $x_3 \in X \setminus (B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$, donc tel que tel que $\mathrm{d}(x_3, x_1) \geqslant \varepsilon$ et $d(x_2, x_2) \geqslant \varepsilon$.

Ainsi, par récurrence on crée une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $i < n$, on ait $\mathrm{d}(x_n, x_i) \geqslant \varepsilon$. On en déduit donc que pour tout $i \neq j$, on a $d(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$. Comme cette propriété reste vraie pour tout sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient aisément qu'aucune sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, ce qui implique qu'aucune sous-suite extraite est est de Cauchy. Cela contredit donc l'hypothèse.

□

Grâce à cette propriété, on peut montrer très facilement le premier théorème suivant.

Théorème 5.16. *Un espace métrique (X, d) est compact au sens de BW si et seulement s'il est précompact et complet.*

Démonstration. On commence par supposer que (X, d) compact au sens de BW. Par la Proposition 5.7, (X, d) est complet. Il reste donc à démontrer qu'il est précompact, autrement dit que toute suite admette une sous-suite de Cauchy par la Proposition 5.15. C'est évident : (X, d) étant compact au sens de BW, toute suite admet une sous-suite convergente, qui est donc de Cauchy par la Proposition 4.1.

Inversement, supposons que (X, d) soit précompact est complet. (X, d) étant précompact, par la Proposition 5.15, tout sous-suite admet une sous-suite de Cauchy. La complétude de (X, d) implique alors que cette sous-suite est convergente. Donc (X, d) est compact au sens de BW. □

On est maintenant prêts pour démontrer le résultat important suivant.

Théorème 5.17. *Un espace métrique est compact au sens de BW si et seulement s'il est compact au sens de BL. On dira donc dorénavant qu'il est compact.*

Démonstration. Supposons dans un premier temps que (X, d) est compact au sens de BL. Prenons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de X. Si elle prend un nombre fini de valeurs, alors on peut en extraire une sous-suite constante et donc convergente. Supposons donc que cette suite prenne un nombre infini de valeurs. Dans ce cas, posons $A = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui est donc de cardinal infini. Supposons que our tout $x \in X$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \cap A$ soit de cardinal fini. On a alors clairement que $X = \cup_{x\in X} B(x, r_x)$, qui est un recouvrement de X par des ouverts. Comme X est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini : il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $i_1, \ldots, i_n \in I$ tels que $X = \bigcup_{k=1}^n B(x_i, r_{x_i})$. Notamment, $A = \bigcup_{k=1}^n (B(x_i, r_{x_i}) \cap A)$, qui est donc fini comme réunion finie d'ensembles finis. C'est impossible car A est supposé de cardinal infini. Donc il existe $x > 0$ tel que pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. En prenant $r = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et en utilisant la définition de A ainsi qu'un raisonnement déjà vu, on extrait facilement une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $d(x, x_{\varphi(n)}) < 1/\varphi(n)$. Donc $x_{\varphi(n)} \to x$, on a donc bien extrait une sous-suite convergente et X est compact au sens de BW.

Inversement, supposons X compact au sens de BW. On veut montrer que X est compact au sens de BL. Écrivons donc $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ pour une collection quelconques d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$, et essayons d'en extraire un sous-recouvrement fini. Pour ce faire, montrons alors la propriété suivante : il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha) \subset U_i$. En effet, par l'absurde, si ce n'était pas le cas, pour tout $\alpha > 0$, il existerait $x \in X$ tel que pour tout $i \in I$, on aurait $B(x, \alpha) \not\subset U_i$. En prenant $\alpha = 1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc existence d'un $x_n \in X$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $B(x_n, 1/n) \not\subset U_i$. X étant compact au sens de BW, on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers un certain $x \in X$. Les U_i formant un recouvrement de X, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. U_{i_0} étant ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset_{i_0}$. Or, si $y \in B(x_\varphi(n), 1/\varphi(n))$, on a

$$d(x, y) \leqslant d(x, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, y) \leqslant d(x, x_{\varphi(n)}) + \frac{1}{\varphi(n)}.$$

Le membre de droite tendant vers 0, pour N suffisamment grand, on a donc que si $y \in B(x_\varphi(N), 1/\varphi(N))$, on a $d(x, y) \leqslant r$. Donc $y \in B(x, r) \subset U_{i_0}$. Ainsi, $B(x_\varphi(N), 1/\varphi(N)) \subset U_{i_0}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Donc il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha) \subset U_i$. En appliquant la définition de la précompacité (puisque X est compact au sens de BW, donc on peut appliquer le Théorème 5.16), avec $\varepsilon = \alpha$, on a donc existence de $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que $X = \bigcup_{k=1}^n B(x_i, \alpha)$. Comme pour tout x_i, il existe un indice i_{x_i} tel que $B(x_i, \alpha) \subset U_{i_{x_i}}$, on en déduit que $X = \bigcup_{k=1}^n U_{i_{x_i}}$. On a donc bien extrait un sous-recouvrement fini, et X est compact au sens de BL. □

Un corollaire important de ce théorème est le suivant, dans le cas où l'espace métrique ambiant est complet.

Corollaire 5.18. *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et* $A \subset X$ *une partie précompacte. Alors,* A *est compacte si et seulement si* A *est précompacte et fermée.*

Démonstration. On sait déjà que si A est compacte, alors A est précompacte et fermée par la Remarque 5.2 et la Proposition 5.4. Inversement, si A est précompact et fermée, comme X est complet, alors A est précompact et complet par la Proposition 4.6, donc compact par le Théorème 5.16. □

5.3.4 Compacité relative

Une notion importante et celle de compacité relative.

Définition 5.6. Soit (X, d) un espace métrique. Soit A une partie de X. On dit que A est relativement compacte si $\overline{A}$ est compacte.

Remarque 5.3. Une partie relativement compacte est incluse dans un ensemble compact donc précompact ; tout sous-ensemble d'une ensemble précompact étant précompact, toute partie relativement compacte est nécessairement précompacte. La réciproque est en général fausse, on verra dans quel cadre elle devient vérifiée.

On dispose des caractérisations suivantes de la compacité reltive.

Proposition 5.19. *Soit (X, d) un espace métrique. Soit A une partie de X. On a équivalence entre les trois propriétés suivantes.*

1. *A est relativement compacte.*
2. *A est incluse dans un compact.*
3. *De toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite qui converge dans X.*

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$: Si A est relativement compacte, elle est incluse dans $\overline{A}$, qui est compact par définition.

$2 \Rightarrow 3$: Si A est incluse dans un certain compact K, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de A. Alors c'est aussi une suite d'éléments de K, on peut donc trouver une extraction φ et $k \in K$ tels que $x_\varphi(n) \to k$ quand $n \to \infty$. On a donc bien aussi que $x_\varphi(n) \to k$ dans X.

$3 \Rightarrow 1$: supposons que de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite qui converge dans X, et montrons que $\overline{A}$ est compact. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\overline{A}$. On cherche à en extraire une sous-suite convergente dans $\overline{A}$. Par définition de $\overline{A}$, A est dense dans $\overline{A}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in A$ tel que $d(x_n, a_n) \leqslant 1/n$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant une suite d'éléments de A, par hypothèse, on peut donc trouver une extraction φ et $x \in X$ tels que $a_\varphi(n) \to x$ quand $n \to \infty$. Or $(a_\varphi(n))_{n\in bN^*}$ étant une suite d'éléments de A, la limite ex st forcément dans $\overline{A}$ par définition de l'adhérence. Enfin, par inégalité triangulaire,

$$0 \leqslant d(x_{\varphi(n)}, x) \leqslant d(x_{\varphi(n)}, a_{\varphi(n)}) + d(a_{\varphi(n)}, x) \leqslant \frac{1}{\varphi(n)} + d(a_{\varphi(n)}, x).$$

Par théorème d'encadrement, le membre de droite tendant vers 0 quand $n \to \infty$, on a donc que $x_{\varphi(n)} \to x \in \overline{A}$ quand $n \to +\infty$, ce qui conclut la preuve de la compacité de $\overline{A}$. □

Enfin, quand l'espace ambiant est complet, on a la caractérisation suivante.

Proposition 5.20. *Soit* (X, d) *un espace métrique complet. Soit* A *une partie de* X*. Alors* A *est relativement compacte si et seulement si* A *est précompacte.*

Démonstration. On a déjà vu à la Remarque 5.3 qu'un ensemble relativement compact était précompact. Inversement, si A est précompact, alors $\overline{A}$ est aussi précompact. En effet, soit $\varepsilon > 0$. A étant précompact, il existe une quantité finie de points $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \varepsilon). \tag{5.13}$$

Par définiton de $\overline{A}$, pour tout $x \in \overline{A}$, il existe $a \in A$ tel que $x \in B(a, \varepsilon)$. Par (5.13), il existe $i \in [|1, n|]$ tel que $a \in B(a_i, \varepsilon)$. Donc, grâce à une inégalité triangulaire, on a $x \in B(a_i, 2\varepsilon)$. Ainsi,

$$\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, 2\varepsilon). \tag{5.14}$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on a donc bien que $\overline{A}$ est précompact. $\overline{A}$ étant aussi fermé dans (X, d) complet, $\overline{A}$ est aussi complet par la Proposition 4.6. Il est donc compact par le Théorème 5.16, ce qui dit bien par définition que A est relativement compacte. □

5.4 Compacité dans les evn et ses conséquences

Dans cette section nous étudions le concept de compacité dans les espaces vectoriels normés. La situation est extrêmement différente selon que l'on soit dans un espace vectoriel de dimension finie ou infinie.

5.4.1 Parties compactes de $(\mathbb{K}^k, || \cdot ||_\infty)$

Dans le but de caractériser les parties compactes d'un evn général, commençons par un cas particulier.

Théorème 5.21. *Les parties compactes de* $(\mathbb{K}^k, || \cdot ||_\infty)$ *sont les parties fermées et bornées.*

Démonstration. Nous ne traitons ici que le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Le cas des evn sur $\mathbb{C}$ se traite de manière analogue en travaillant sur les parties réelles et imaginaires.

Par la Proposition 5.3, il nous suffit de démontrer le sens réciproque, à savoir que si $A \subset \mathbb{R}^k$ est fermé et borné, alors A est compact. Soit donc A un fermé et borné dans $(\mathbb{R}^k, || \cdot ||_\infty)$, inclus dans $B(0, M)$ pour un certain $M > 0$. On se donne une base $(e_1, \dots, e_k)$ de E. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de A. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(a_n^1, \dots a_n^k) \in \mathbb{R}^k$ tel que

$$a_n = (a_n^1, \dots a_n^k).$$

Montrons que chacune des suites $(a_n^i)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. C'est très simple : pour tout $i \in [1, k|]$, puisque $A \subset B(0, M)$, on a $|a_n^i| \leqslant ||a_n||_\infty < M$. Ainsi, pour $i = 1$, on peut extraire de $(a_n^1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite convergente : il existe $a^1 \in A$ et φ_1 une extraction telle que $a^1_{\varphi_1(n)} \to a^1$ quand $n \to \infty$. Pour $i = 2$, on peut extraire de $(a^2_{\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite convergente : il existe $a^2 \in A$ et φ_2 une extraction telle que $a^2_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)} \to a^2$. On a toujours que $a^1_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)} \to a^1$ quand $n \to \infty$. En raisonnant par récurrence, on créer donc une extraction $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \ldots \circ \varphi_k$ et des réels $a^1, \ldots a^k$ tels que pour tout $i \in [|1, k|]$, on ait $a^i_{\varphi(n)} \to a^i$ quand $n \to \infty$. On pose $a = (a^1, \ldots a^k) \in \mathbb{R}^k$. Alors

$$||a_{\varphi(n)} - a||_\infty \leqslant \sum_{i=1}^k ||a^i_{\varphi(n)} - a^i|| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty,$$

puisqu'on somme un nombre fini de suites tendant vers 0. Donc $a_{\varphi(n)} \to a$ quand $n \to \infty$. De plus, A étant fermé, on a bien que $a \in A$, donc on a extrait une sous-suite convergente dans A et A est bien compact. $\square$

5.4.2 Équivalence des normes en dimension finie

Grâce au Théorème 5.21, on peut démontrer le résultat très fort suivant.

Théorème 5.22. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les normes sur E sont équivalentes entre elles.*

Démonstration. On se place dans le cas réel, le cas complexe étant similaire. On commence par traiter le cas de $\mathbb{R}^k$. Soit $\mathfrak{n}$ une norme sur $\mathbb{R}^k$. Par transitivité de de l'equivalence, il suffit de montrer que cette norme $\mathfrak{n}$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$, auquel cas il est assez facile de voir que toutes les normes seront équivalentes entre elles . On appelle ε_i les vecteurs de la base canonique. On commence par remarquer que $\mathrm{p}\mathfrak{n}(x) \leq C_1\|x\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^k$, où $C_1 = \sum_{i=1}^n \mathfrak{n}(\varepsilon_i)$. En effet, par inégalité triangulaire et homogénéité on a

$$\mathfrak{n}(x) = \mathfrak{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leq ||x||_\infty \sum_{i=1}^n \mathfrak{n}(\varepsilon_i) \leq C_1\|x\|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^k. \tag{5.15}$$

En particulier, ceci montre que Id : $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^k, \mathfrak{n})$ est une application linéaire qui est de plus, continue car continue en 0 (on le vérifie aisément à travers la caractérisation séquentielle, en effet si $\|x_n - x\| \to 0$ l'inégalité qu'on vient de démontrer implique que $\mathfrak{n}(x_n - x) \to 0$).

On passe maintenant à montrer qu'il existe $C_2 > 0$ tel que $\mathfrak{n}(x) \geq C_2\|x\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^k$. L'inégalité étant trivialement vérifiée, pour $x = 0$, on cherche donc $C_2 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^k$, on ait $\frac{\mathfrak{n}(x)}{\|x\|_\infty} \geq C_2$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^k$ non nul, $\mathfrak{n}(x) = \|x\|_\infty \mathfrak{n}(y)$ où $y = x/\|x\|_\infty$ est tel que $\|y\| = 1$. Ainsi, par homogénéité, si l'on considère

$$C_2 := \inf_{\substack{y\in E \\ \|y\|_\infty=1}} \mathfrak{n}(y) \geq 0, \tag{5.16}$$

on peut conclure si l'on arrive à montrer que $C_2 > 0$. Or, l'ensemble $\mathcal{S} = \{y \in E \mid \|y\|_\infty = 1\}$ est compact dans $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty)$ comme sous-ensemble fermé de la boule unité, en vertu du théorème 5.21. Comme on vient de montrer que Id : $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^k, \mathfrak{n})$ est continue, on a que $\mathcal{S}$ est compacte dans $(\mathbb{R}^k, \mathfrak{n})$. Finalement, le fait que la norme $\mathfrak{n}$ soit continue dans $(\mathbb{R}^k, \mathfrak{n})$ nous garantit qu'elle atteint un minimum sur chaque compact, et donc qu'il existe $y_\star \in \mathcal{S}$ tel que $C_2 = \mathfrak{n}(y_\star) \neq 0$. Ici on a utilisé que $0 \notin \mathcal{S}$. Ceci termine la preuve dans le cas $E = \mathbb{R}^k$.

Revenons maintenant au cas E quelconque. Soient $\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$ On saut que E et $\mathbb{R}^k$ sont isomorphes. On fixe donc φ un tel isomorphisme (supposé donc linéaire). On vérifie facilement que $\mathfrak{n}_1 \circ \varphi$ et $\mathfrak{n}_2 \circ \varphi$ sont des normes sur $\mathbb{R}^k$ (puisque φ est linéaire et bijectif). Donc $\mathfrak{n}_1 \circ \varphi$ et $\mathfrak{n}_2 \circ \varphi$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^d$, ainsi il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^k$, on ait

$$C_1 \mathfrak{n}_1(\varphi(x)) \leqslant \mathfrak{n}_1(\varphi(x)) \leqslant C_2 \mathfrak{n}_1(\varphi(x)).$$

φ étant surjective, on a donc bien que pour tout $y \in E$,

$$C_1 \mathfrak{n}_1(y) \leqslant \mathfrak{n}_1(y) \leqslant C_2 \mathfrak{n}_1(y),$$

ce qui assure que $\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$ sont équivalentes. $\square$

Par équivalence des normes, on en déduit aussi le résultat suivant (étant clair que la notion de sous-suite convergente est invariante par normes équivalentes, la notion de compacité est aussi invariante par changement de normes équivalentes).

Corollaire 5.23. *Dans un evn , les notion de partie ouverte, fermée, bornée, compacte, et de suite convergente est indépendante de la norme que l'on place sur cet evn .*

Une partie d'un evn de dimension finie est donc compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Ainsi, dorénavant, quand on parlera d'un evn , on pourra s'autoriser à choisir la norme qui nous arrange le plus, puisque cela ne change rien aux propriétés topologiques et métriques.

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 5.24. *Tout espace vectoriel de dimension finie est complet.*

Démonstration. Toute suite de Cauchy étant bornée, elle est incluse dans une boule fermée bornée donc compacte par le Théorème de Heine-Borel. On peut donc en extraire une sous-suite convergente, ce qui assure donc que le suite de Cauchy elle-même est convergente par la Proposition 4.3. $\square$

Enfin, on en déduit aussi immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 5.25. *Les parties relativement compactes (ou précompactes, puisqu'un evn de dimension finie est complet par le corollaire précédent) d'un evn de dimension finie sont les parties bornées.*

5.4.3 Le cas de la dimension infinie

Pour traiter le cas de la dimension infinie, nous allons utiliser le lemme suivant.

Lemma 5.26 (Lemme de Riesz)**.** *Soit $(E, \mathfrak{n})$ un evn et soit F un sev fermé strict de E (au sens où $F \neq E$. Alors, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ il existe $x \in E$ tel que*

$$\mathfrak{n}(x) = 1 \qquad et \qquad \mathrm{d}(x, F) := \inf_{y \in F} \mathfrak{n}(x - y) \geq 1 - \varepsilon. \tag{5.17}$$

Démonstration. Comme $F \neq E$ et que F est fermé, il existe donc $v \in E$ tel que $\mathrm{d}(v, F) > 0$ (voir exercice **??**). De plus, on a

$$\frac{\mathrm{d}(v, F)}{1 - \varepsilon} > \mathrm{d}(v, F), \tag{5.18}$$

et donc, par les propriétés de l'infimum, il existe $y \in F$ tel que

$$\mathfrak{n}(v - y) < \frac{\mathrm{d}(v, F)}{1 - \varepsilon}. \tag{5.19}$$

On pose $x = \frac{v-y}{\mathfrak{n}(v-y)}$. On a immédiatement $\mathfrak{n}(x) = 1$. De plus, pour tout $z \in F$ on a

$$\mathfrak{n}(x - z) = \frac{1}{\mathfrak{n}(v - y)} \mathfrak{n}\big(v - y - \mathfrak{n}(v - y)z\big) > \frac{1 - \varepsilon}{\mathrm{d}(v, F)} \mathfrak{n}\big(v - \mathfrak{n}(v - y)y\big) \geq 1 - \varepsilon. \tag{5.20}$$

Ici on a utilisé (5.19) et le fait que $y + \mathfrak{n}(v - y)z \in F$. Le résultat suit en passant à l'infimum pour $z \in F$. □

Remarque 5.4. — Ceci n'est pas forcément vérifié si F n'est pas fermé. Notamment si F est dense, on a que pour tout $x \in E$, $d(x, F) = 0$ et donc le résultat devient faux. En revanche, on vérifie facilement que si F n'est pas fermé mais pas dense, on peut obtenir aussi le Lemme de Riesz.

— Le résultat devient faut si $\varepsilon < 0$. En effet, $0 \in F$, donc pour tout $x \in E$ de norme 1, on a $d(x, F) \leqslant ||x - 0|| = 1$.

— Intéressons-nous maintenant au cas $\varepsilon = 0$. On vérifie alors aisément que ce cas ne se produit que si $d(x, F)$ est atteinte en $f = 0 \in F$.

Théorème 5.27. *Soit $(E, \mathfrak{n})$ un evn . La boule unité fermé $\bar{B}(0,1)$ est compacte si et seulement si $\dim E < +\infty$. Il en est de même pour la sphere $\mathcal{S} = \{y \in E \mid \mathfrak{n}(y) = 1\}$.*

Démonstration. Comme $\bar{B}(0,1)$ et $\mathcal{S}$ sont bornées et fermées, elles sont compactes si $\dim E < +\infty$. Il nous reste donc à montrer que $\bar{B}(0,1)$ et $\mathcal{S}$ ne sont pas compactes si $\dim E = +\infty$.

À cet effet, on montrera que si $\dim E = +\infty$ il existe une suite $(x_n)_n \in \mathcal{S} \subset \bar{B}(0,1)$ telle que $\mathfrak{n}(x_n - x_m) \geq 1/2$ pour tout $n \neq m$. On fixe donc $x_0 \in \mathcal{S}$, et on considère $F_0 = \mathrm{vec}\{x_0\} \subset E$. On observe que F_0 est fermé et que $F_0 \neq E$, car

$$1 = \dim F_0 < \dim E = +\infty \implies F_0 \neq E. \tag{5.21}$$

Donc, par le Lemme de Riesz avec $\varepsilon = 1/2$, il existe $x_1 \in E \setminus F_0$ tel que $\mathfrak{n}(x_1) = 1$ et $\mathrm{d}(x_1, F_0) \geq 1/2$. En particulier, $x_1 \in \mathcal{S}$ et $\mathfrak{n}(x_0 - x_1) \geq 1/2$. On procède maintenant par récurrence, en supposant d'avoir choisi $x_0, \ldots, x_n \in \mathcal{S}$ tels que $\mathfrak{n}(x_k - x_m) \geq 1/2$ si $k \neq m$ et $k, m \leq n$. Mais alors, le même raisonnement que tout à l'heure avec $F_{n+1} = \mathrm{vec}\{x_0, \ldots, x_n\}$, nous garantis qu'il existe $x_{n+1} \in \bar{B}(0,1)$ tel que $\mathfrak{n}(x_k - x_{n+1}) \geq 1/2$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. En effet, on peut appliquer à nouveau le Lemme de Riesz car F_{n+1} est fermé et

$$n + 1 = \dim F_{n+1} < \dim E = +\infty \implies F_n \neq E. \tag{5.22}$$

Ceci démontre l'existence de la suite souhaité, et clôt la preuve. □

Remarque 5.5. En fait, par un raisonnement déjà vu, on a démontré mieux : $B_f(0,1)$ et $S(0,1)$ ne sont pas précompactes (et donc pas compactes). En effet, l'inégalité $\mathfrak{n}(x_k - x_m) \geq 1/2$ si $k \neq m$ et $k, m \leq n$ assure qu'il n'existe pas de sous-suite de Cauchy convergente pour $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Corollaire 5.28. *Soit $(E, \mathfrak{n})$ un evn . Soit $a \in E$ et $r > 0$. La boule fermée $\bar{B}(a, r)$ est (pré)-compacte si et seulement si $\dim E < +\infty$. Il en est de même pour la sphere $S(a, r)$.*

Démonstration. Soit

$$\varphi : x \in E \mapsto a + rx.$$

φ est clairement une fonction continue. De plus, $\varphi(\bar{B}(0,1)) \subset \bar{B}(a,r)$ et $\varphi(S(0,1)) \subset S(a,r)$. De plus, i lest très facile de voir que φ est bijective de $\bar{B}(0,1)$ vers $\bar{B}(a,r)$ et de $S(0,1)$ vers $S(a,r)$, puisque inverser la relation $y = a + rx$ admet une unique solution $x = \varphi^{-1}(y) = (y-a)/r$, qui envoie bien $\bar{B}(a,r)$ vers $\bar{B}(0,1)$ et $S(a,r)$ vers $S(0,1)$. Donc φ^{-1} est clairement continue. Donc φ est un homéomorphisme. Donc $\bar{B}(0,1)$ ou $S(0,1)$ est (pré)-compact si et seulement si $\bar{B}(a,r)$ ou $S(a,r)$ l'est (on montrer à titre d'exercice que l'image d'un précompact par une application uniformément continue est précompact, en utilisant la caractérisation par les sous-suites de Cauchy). D'où le résultat par le théorème de Riesz. □

5.5 Quelques applications

Les résultats suivants sont hors programme, et donnés à titre d'illustration et d'entrainement.

5.5.1 Fonctions non bornées à l'infini

Exemple 5.12. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $|f(x)| \to +\infty$ quand $x \to \infty$. Alors f admet un minimum.

Démonstration. Considérons n'importe quel $M > 0$. Par hypothèse sur f, il existe un certain $A > 0$ tel que

$$||x|| > A \Rightarrow f(x) > M.$$

Il reste à choisir intelligemment M. Prenons par exemple $M > f(0)$. On remarque alors que pour tout x tel que $||x|| > A$, on a $\inf_{x \in \mathbb{R}r^d} f(x) \leqslant f(0) < m \leqslant f(x)$. Ainsi, si $||x|| > A$, on a $\inf_{x \in \mathbb{R}r^d} f(x) << f(x)$, ce qui signifie qu'au lieu de prendre la borne inférieure sur $\mathbb{R}^d$ tout entier, on peut la prendre sur $B_f(0, M)$. f étant continue sur le compact $B_f(0, M)$ (qui est bien un fermé borné d'un espace vectoriel de dimension finie), on en déduit par le théorème des bornes atteintes que f est bornée et atteint ses bornes. Notamment, il existe donc bien $x_0 \in B_f(0, M)$ tel que $\inf_{x \in \mathbb{R}r^d} f(x) = \inf_{x \in B_f(0,M)} f(x) = f(x_0)$, ce qui conclut l'exemple. $\square$

5.5.2 Théorème des compacts emboîtés

Exemple 5.13. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante (pour l'inclusion) de compacts non vides. Alors $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$ est un compact non vide.

Démonstration. $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$ est fermé un comme intersection de fermés, tout compact étant fermé, il s'agit donc d'un fermé inclus dans le compact K_1 (par décroissance), il est donc compact. Donnons deux preuves différentes du fait qu'il soit non vide.

— Une preuve séquentielle. Chaque K_n étant non vide, il existe $x_n \in K_n$. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite du compact K_1 (par décroissance), on peut donc en extraire une sous-suite convergente : il existe $x \in K_0$ et φ une extraction tels que $x_n \to x$ quand $n \to \infty$. Il reste à montrer que $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$. Pour ce faire, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $x_{\varphi(n+p)} \in K_{\varphi(n+p)} \subset K_n$ par décroissance. Notamment, on peut faire $p \to \infty$, comme K_n est fermé, on a que $x \in K_n$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit le résultat voulu.

— Une preuve en utilisant la propriété de Borel-Lebesgue. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n = \emptyset$. On a donc que

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} X \setminus K_n.$$

Notamment,

$$K_1 \subset= \bigcup_{n=1}^{+\infty} X \setminus K_n.$$

On a donc un recouvrement du compact K_1 par des ouverts (un compact est fermé, donc le complémentaire est ouvert), on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini : il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $n_1, \ldots n_k$ tels que

$$K_1 \subset= \bigcup_{i=1}^{k} X \setminus K_{n_i}.$$

Comme $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante au sens de l'inclusion, $(X \setminus K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et croissante au sens de l'inclusion. On pose donc $J = \max_{i \in [|1,k|]} n_i$. On a alors

$$\bigcup_{i=1}^{k} X \setminus K_{n_i} \subset X \setminus K_J.$$

On aurait donc $K_1 \subset X \setminus K_J$, ce qui est absurde puisque $K_1 \subset K_J$ et que K_J est non vide.

$\square$

5.5.3 Suites convergentes

Nous allons démontrer la propriété suivante, qui s'avère parfois très utile.

Exemple 5.14. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de X qui converge vers un certain $x \in \mathbb{N}^*$. Alors $\Gamma = \{x_n\} \cup \{l\}$ est un ensemble compact de X.

Démonstration. Il est possible de démontrer cette propriété à l'aide d'un raisonnement séquentiel, mais c'est un peu pénible à rédiger et pas très élégant. Nous allons plutôt utiliser ici la propriété de Borel-Lebesgue. On se donne donc une collection d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ telle que $\Gamma \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

Comme $l \in \Gamma$, il existe $i_0 \in I$ tel que $l \in U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est un voisinage de l et que $x_n \to l$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_n \in U_{i_0}$ dès que $n \geqslant N$. D'autre part, pour tout $1 \leqslant n < N$, il existe $i_n \in I$ tel que $x_n \in U_{i_n}$. On en déduit donc que

$$\Gamma \subset \bigcap_{k=0}^{N-1} U_{i_k},$$

et on a donc bien extrait un sous-recouvrement fini.

$\square$

5.5.4 Théorème d'Ascoli-Arzéla

Nous allons donner une condition suffisante (qui s'avère d'ailleurs aussi nécessaire) de compacité dans $C([0, 1])$.

Définition 5.7. Une partie $\mathcal{F} \subset C([0, 1])$ est *équicontinue* si on a

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ t.q. } \forall f \in \mathcal{F} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ si } |x - y| < \delta. \tag{5.23}$$

Elle est *uniformément bornée* s'il existe $M > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq M$ pour tout $f \in \mathcal{F}$.

Exemple 5.15. On pose $k > 0$ et on considère K l'ensemble des fonctions k-Lipschitziennes sur $[0, 1]$ (il s'agit bien de fonctions continues). Alors cet ensemble est équicontinu : si on se donne $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$, on a alors que pour tout $f \in K$, et tout $x, y \in [0, 1]$ tels que $|x - y| < \delta$, on a

$$|f(x)) - f(y)| \leqslant k|x - y| < k\delta \leqslant \varepsilon.$$

On va démontrer le résultat suivant (à comparer avec l'Exercice **??**).

Théorème 5.29 (Théorème d'Ascoli)**.** *Une partie $\mathcal{F} \subset C([0,1])$ uniformément bornée et uniformément équicontinue est précompacte. En particulier, toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ admet une sous-suite uniformémente convergente dans $C([0,1])$.*

Démonstration. La deuxième partie de l'énoncé est une consequence immédiate du Corollaire 5.18. Il nous reste donc à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existent $f_1, \dots, f_\kappa$, $\kappa \in \mathbb{N}$, telles que

$$\min_{j\in[\![1,\kappa]\!]} \|f - f_j\|_\infty < \varepsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F}. \tag{5.24}$$

En effet, ceci montrera que $\mathcal{F}$ est précompact.

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\mathcal{F}$ est uniformément borné, il existe $M > 0$ tel que $\|f\|_\infty \le M$ pour toute $f \in \mathcal{F}$. Par uniforme équicontinuité, il existe δ tel que si $|x - y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour toute $f \in \mathcal{F}$.

Soient $K, N \in \mathbb{N}$ tels que $K > 2M/\varepsilon$ et $N > 1/\delta$, et considèrons l'ensemble $\mathcal{A} \subset C([0,1])$ des fonctions g affines par morceaux et telles que

$$\forall n \in [\![0,N]\!],\ \exists k = k(n) \in [\![-K,K]\!] \quad \text{t.q.} \quad g\left(\frac{n}{N}\right) = k\frac{M}{K}. \tag{5.25}$$

Comme $g \in \mathcal{A}$ est déterminé par le couples $\{(n, k(n)) \mid n \in [\![0,N]\!]\}$ est évident que $\mathcal{A}$ contient un nombre fini d'éléments. Donc, pour démontrer (5.24), il nous suffit de montrer que

$$\min_{g\in\mathcal{A}} \|f - g\|_\infty < 4\varepsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F}. \tag{5.26}$$

Fixons $f \in \mathcal{F}$ et considérons $g \in \mathcal{A}$ tel que

$$\left|f\left(\frac{n}{N}\right) - g\left(\frac{n}{N}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.27}$$

On observe qu'une telle g existe, car $\left|k\frac{M}{K} - k + 1\frac{M}{K}\right| = M/K < \varepsilon/2$ pour tout $k \in [\![-K,K]\!]$. De plus, par uniforme équicontinuité on a

$$\left|f\left(\frac{n}{N}\right) - f\left(\frac{n+1}{N}\right)\right| < \varepsilon \implies \left|g\left(\frac{n}{N}\right) - g\left(\frac{n+1}{N}\right)\right| < 2\varepsilon. \tag{5.28}$$

Comme g est affine entre n/N et $(n+1)N$, ceci nous dit que

$$\left|g\left(\frac{n}{N}\right) - g(x)\right| < 2\varepsilon. \tag{5.29}$$

Finalement, pour tout $x \in [0,1]$ si on pose $n_x = \lfloor Nx \rfloor$ on a

$$|f(x) - g(x)| \le \left|f(x) - f\left(\frac{n}{N}\right)\right| + \left|f\left(\frac{n}{N}\right) - g\left(\frac{n}{N}\right)\right| + \left|g\left(\frac{n}{N}\right) - g(x)\right|. \tag{5.30}$$

Comme $|x - n/N| < 1/N < \delta$ on a que

$$\left|f(x) - f\left(\frac{n}{N}\right)\right| < \varepsilon. \tag{5.31}$$

Par uniforme équicontinuité et (5.29), on obtient $|f(x) - g(x)| < 4\varepsilon$, et donc (5.26). □

Comme application du théorème d'Ascoli on présent une idée de démonstration du résultat suivant, qui montre que en affaiblissant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz on peut toujours prouver l'existence (mais pas l'unicité) de solutions de (EDO).

5.6 Exercices

Compacité séquentielle

Exercice 5.1. (*) Démontrer que dans un espace métrique, le diamètre d'une partie compacte est fini et atteint.

Exercice 5.2. (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ muni de n'importe quelle norme. Les ensembles de matrices suivants sont-ils compacts ?

1. Les matrices dont chacun des coefficients sont de valeur absolue plus petite que 1.
2. $GL_n(\mathbb{R})$.
3. $O_n(\mathbb{R})$.
4. Les matrices symétriques dont les valeurs propres sont dans $[-1, 1]$.

Exercice 5.3. (**) Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soient K_1 et K_2 deux ensembles compacts de X. Montrer que $d(K_1, K_2)$ est atteinte.
2. Soit K un compact de X et F un fermé de X. On suppose que $K \cap F = \emptyset$. Montrer que $d(K, F) > 0$. Cette propriété reste-elle vérifiée si K est seulement fermé ?
3. On se place dans $\mathbb{R}^n$. On considère K un compact de $\mathbb{R}^n$ et F un fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $d(K, F)$ est atteinte.

Exercice 5.4. (*) Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ une partie non vide et bornée, et $|| \cdot ||$ n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^d$. On souhaite démontrer que A est incluse dans une boule de rayon minimal.

1. Montrer que l'ensemble des $r \geqslant 0$ tels qu'il existe une boule fermée de rayon r contenant A admet une borne inférieure notée r_0.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\rho_n = r_0 + 1/n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in A$ tel que $A \subset B(x_n, \rho_n)$.
3. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.
4. Conclure.

Exercice 5.5. (**) Soit $(E, || \cdot ||)$ un evn et $K \subset B(0, 1)$ un compact. Montrer qu'il existe $r < 1$ tel que $B \subset B_F(0, r)$. On pourra regarder l'application norme.

Exercice 5.6. (**) Soit $(E, || \cdot ||)$ un espace vectoriel normé, ainsi que K et L deux compacts de E. Montrer que l'ensemble

$$K + L = \{k + l | k \in K, \, l \in L\}$$

est compact.

Exercice 5.7. (**) Soit $(E, || \cdot ||)$ un espace vectoriel normé, ainsi que K un compact de E et L un fermé de E. Montrer que l'ensemble

$$K + L = \{k + l | k \in K, \, l \in L\}$$

est fermé.

Exercice 5.8 (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.** (***) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que $|P|$ admet un minimum global en un certain $z_0 \in \mathbb{C}$. On appelle m ce minimum.
2. On suppose que $P(z_0) \neq 0$.
   a) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $P^{(k)}(z_0) \neq 0$. On pose k_0 le minimum des $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $P^{(k)}(z_0) \neq 0$.
   b) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $c^{k_0} = -P(z_0)\overline{P^{(k_0)}(z_0)}$.
   c) En effectuant un développement limité pour l'application $t \mapsto P(z_0+tc)$, montrer que pour t suffisamment petit, $|P(z_0+tc)| < m$.
3. Conclure.

Exercice 5.9. (***) Soit (X, d) un espace métrique compact et $F : X \to X$ une application contractante : pour tout $(x, y) \in X^2$ avec $x \neq y$, on a $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe α. On pourra considérer $x \mapsto d(x, f(x))$ et montrer qu'elle admet un minimum.
2. Montrer que si K est un fermé de X stable par K, alors $\alpha \in K$.
3. Soit $x_0 \in X$. Montrer que la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers α.
4. Ces résultats restent-ils vrais si X n'est plus compact ?

Exercice 5.10. (***) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn , C une partie compacte de E et $f : C \to E$ t.q. $f(C) \subset C$. Montrer que :

1. si f est une isométrie (*i.e.*$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in C$), alors elle est bijective.
2. si $\|f(x)-f(y)\| \geq \|x-y\|$ pour tous $x, y \in C$, alors elle est une isométrie bijective.

Indication : considérer les images itérées d'un point.

Exercice 5.11. (**) Soit (E, evn) et F un sous-espace vectoriel de E.

1. On suppose que F est de dimension finie. Montrer que F est fermé.
2. Cette propriété reste-elle vérifiée si F n'est plus de dimension finie ? *Indication : on pourra penser à un résultat de densité vu en cours.*

Précompacité et propriété de Borel-Lebesgue

Exercice 5.12. (*) Construire dans $\mathbb{R}$ une métrique d équivalente (au sens topologique : qui a les mêmes parties ouvertes) à la métrique usuelle pour laquelle $(\mathbb{R}, d)$ est un espace précompact.

Exercice 5.13. (*) Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction localement borné (c'est-à-dire tel que pour tout $x \in X$ il existent $r_x > 0$ et $M_x > 0$ tels que $|f(y)| \leq M_x$ pour tout $y \in B(x, r_x)$). Montrer que f est bornée (c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X$).

Exercice 5.14. (**)

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}^n$ une application localement lipschitzienne (*i.e.* pour tout point $x \in A$, il existe un voisinage V_x de A sur lequel $f_{|V_x}$ est lipschtizienne). Montrer que f est lipschtizienne sur A.
2. Répondre à la question précédente en utilisant la propriété de Bolzano-Weierstrass. On pourra raisonner par l'absurde et considérer deux suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$||f(y_n) - f(z_n)|| > n||y_n - z_n||.$$

Exercice 5.15. (**) Soit (X, d) un espace métrique. Soient A et B deux ensembles compacts de X, tels que $A \cap B = \emptyset$.

1. Soit $b \in B$. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V_b tels que $A \subset U$, $b \in B$ et $U \cap V_b = 0$. On pourra considérer à $a \in A$ fixé, deux voisinages ouverts de U_a de a et W_a de b tels que $U_a \cap W_a = 0$.
2. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V_b tels que $A \subset U$, $b \in B$ et $U \cap V_b = 0$.

Exercice 5.16. (**) Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que pour tout parties compactes $A, B \subset X$ tels que $A \cap B = \emptyset$, il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $A \subset U$ et $B \cap \bar{U} = \varnothing$.

Exercice 5.17. Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de X qui converge vers $x \in X$. On rappelle qu'on a vu en cours que $\{x_n\} \cup \{x\}$ est compact.

1. (Application 1) Soit (Y, d') un autre espace métrique et $f : X \to Y$ une application continue. On suppose que l'image réciproque de tout compact est un compact. Montrer que l'image directe de tout fermé est un fermé.
2. (Application 2) Soit (Y, d') un autre espace métrique et $f : X \to Y$ une application injective. Montrer que f est continue si et seulement l'image de tout compact de X par f est un compact de Y. Ce résultat reste-t-il vérifié si f n'est pas injective ?

Exercice 5.18. (***)On se place dans $E = (l^\infty(\mathbb{N}^*, \mathbb{R}), || \cdot ||_\infty)$.

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs qui tend vers 0. Montrer que $K = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} | \forall n, |x_n| \leqslant a_n\}$ est compact dans E.
2. Montrer que $F = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E | x_n \to 0\}$ n'est pas compact dans E.

Exercice 5.19. (***)On considère $E = l^p(\mathbb{N}^*, \mathbb{R}, || \cdot ||_p)$ avec $p \in [1, \infty[$ fixé.

1. Soit $\varepsilon_n \in l^p(\mathbb{N}^*)$ une suite de réels positifs. Montrer que l'ensemble $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E | \forall n, |u_n| \leqslant \varepsilon_n\}$ est compact. Ce résultat reste-t-il vrai pour $p = +\infty$?
2. On considère une partie $K \subset E$ fermée, bornée, et vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* | \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in K, \sum_{n \geqslant N} |u_n|^p \leqslant \varepsilon.$$

Montrer que K est compact.

3. Étudier la réciproque de la propriété précédente.

Exercice 5.20. (***) On munit $X = \mathbb{R}[X]$ de la norme $||P|| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ (pourquoi est-ce une norme ?). Trouver un ensemble précompact de X qui ne soit pas relativement compact.

6 Connexité

Le but de se chapitre est d'essayer de donner un cadre théorique pour dire qu'un espace métrique est en "un seul morceau".

6.1 Connexité par arcs

6.1.1 Définition et exemples

Définition 6.1. Soit (X, d) un espace métrique. Un *chemin* dans X est une application continue $\gamma : [0,1] \to X$. On dira que le chemin γ relie les $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$.

Par exemple, dans $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d_s})$ la fonction $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ est un chemin qui joint $(1,0)$ à $(-1,0)$.

Définition 6.2. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que $A \subset X$ est *connexe par arcs* si tout couple de points de A est reliée par un chemin qui reste dans A, c'est-à-dire, pour tout $a, b \in X$, il existe un chemin γ tel que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, et $\gamma(t) \in A$ pour tout $t \in [0,1]$.

Remarque 6.1. Le choix de prendre un chemin défini sur $[0,1]$ est arbitraire. En effet, il est facile de démontrer qu'un ensemble est connexe par arcs si et seulement pour tout $a, b \in X$, il existe $t_0 > 0$ et une application continue $\gamma : [0, t_0] \to X$ telle que $\gamma(0) = a$, $\gamma(t_0) = b$, et $\gamma(t) \in A$ pour tout $t \in [0, t_0]$. En effet, le sens direct est trivial (il suffit de prendre $t_0 = 1$), quant au sens réciproque, s'il existe $t_0 > 0$ et une application continue $\gamma : [0, t_0] \to X$ telle que $\gamma(0) = a$, $\gamma(t_0) = b$, et $\gamma(t) \in A$ pour tout $t \in [0, t_0]$, il suffit de poser $\tilde{\gamma} : t \in [0,1] \mapsto \gamma(t_0 t) \in X$. Il s'agit bien d'un chemin qui relie a et b.

On se servira de cette remarque pour éviter de "reparamétriser" après coup des chemins que l'on collerait les uns à la suite des autres.

6.1.2 Ensembles convexes

Dans les evn , une classe particulière d'ensembles connexe par arcs est celle des ensembles convexes.

Définition 6.3. Soit $(E, \mathfrak{n})$ un evn et $A \subset E$. Soient $a, b \in E$. Le *segment* $[a, b]$ est par définition l'ensemble

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb | t \in [0,1]\}.$$

Remarque 6.2. Bien sûr, le segment $[a, b]$ est égal au segment $[b, a]$ (il suffit de changer t en $1 - t$).

Définition 6.4. Soit $(E, \mathfrak{n})$ un evn et $A \subset E$. On dit que A est *convexe* si pour tous $x, y \in A$, le segment $[x, y]$ est inclus dans A, autrement dit :

$$\forall x, y \in A, \quad \forall t \in [0,1], \quad ty + (1-t)x \in A. \tag{6.1}$$

Exemple 6.1. Soit $(E, ||\cdot||)$ un evn , $a \in E$ et $r > 0$. Alors $B(a, r)$ est convexe. En effet, soit $x, y \in B(a, r)$ et $t \in [0, 1]$. Alors, par inégalité triangulaire,

$$||ty+(1-t)x-a|| = ||t(y-a)+(1-t)(x-a) \leqslant t||y-a||+(1-t)||x-a|| < tr+(1-t)r = r.$$

Donc $ty + (1-t)x \in B(a, r)$. On a le même résultat pour la boule fermée$B_f(a, r)$ avec une preuve complètement similaire. Par contre, $S(a, r)$ n'est pas convexe. Par exemple, si $x \in E$ est de norme 1, on a $a \pm xr \in S(a, r)$ mais $\frac{1}{2}(a + xr) + \frac{1}{2}(a - xr) = a \notin S(a, r)$ puisque $||a - a|| = 0 \neq r$.

Proposition 6.1. *Tout ensemble convexe dans un evn est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit $x, y \in A$. La fonction $\gamma : [0, 1] \to X$ définie par $\gamma(t) = ty + (1-t)x$ est bien un chemin reliant x à y. De plus, par convexité $\gamma(t) \in A$ pour tout $t \in [0, 1]$, et donc A est connexe par arcs. □

Finalement on caractérise les connexes par arcs dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$.

Proposition 6.2. *La partie $A \subset \mathbb{R}$ est connexe par arcs dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_s)$ si et seulement si c'est un intervalle (si et seulement si il est convexe).*

Démonstration. Il est trivial de remarquer que A est une intervalle si et seulement si A est convexe. En effet, par définition, A est un intervalle si et seulement si pour tout $x, y \in A$, on a $[x, y] \subset I$.

Ceci implique que toute intervalle est connexe par arcs. Pour démontrer la réciproque, on montrera que toute partie A connexe par arcs est convexe. Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. Il existe donc $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ un chemin joignant x à y dans A. Or, par continuité et théorème des valeurs intermédiaires, $\gamma([0, 1]) = [m, M]$, où $m < M$. On a donc $[m, M] \subset A$ et, car $x, y \in [m, M]$, aussi que $[x, y] \subset [m, M] \subset A$. On en déduit que nécessairement A est un intervalle de $\mathbb{R}$. □

Remarque 6.3. Dans un espace métrique quelconque (X, d), il peut exister des parties connexes par arc et non convexes. Par exemple, dans $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$, on considère l'ensemble des points en dessous du graphe de la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto |t|$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leqslant |x|\}.$$

A n'est pas convexe. En effet, si on prend $a = (-1, 1)$ et $b = (1, 1)$, on a $a, b \in A$ par définition. Toutefois, le milieu du segment $[a, b]$, qui est le point $(0, 1)$, n'est pas dans A puisque $1 > |0| = 0$. Toutefois, A est connexe par arcs. En effet, si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont dans A, on crée un chemin qui reste dans A en concaténant les segments $[(x_1, y_1), (x_1, 0)]$ avec le segment $[(x_1, 0), (x_2, 0)]$ et $[(x_2, 0), (x_2, y_2)]$.

6.1.3 Connexité par arcs et continuité

On aura besoin aussi du résultat suivant.

Proposition 6.3. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soit $F : X \to Y$ une application continue, et soit $A \subset X$ une partie connexe par arcs. Alors, $f(A)$ est connexe par arcs dans Y.*

Démonstration. Soit $y_1, y_2 \in f(A)$. Alors il existe $x_1, x_2 \in A$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. En vertu de la connexité par arcs de A il existe donc un chemin $\gamma : [0,1] \to A$ qui relie x_1 et x_2. Posons alors $\psi = f \circ \gamma$. On a que $\psi : [0,1] \to f(A)$, que $\psi(0) = f(x_1) = y_1$ et que $\psi(1) = f(x_2) = y_2$. Comme ψ est continue étant la composition de fonctions continues, on a donc trouvé un chemin qui relie y_1 à y_2. $\square$

Remarque 6.4. En général, la préimage d'un ensemble connexe par arcs n'est pas nécessairement connexe par arcs. En effet, si l'on considère la fonction $f : x \in (\mathbb{R}, \mathrm{d}_s) \mapsto x^2 \in (\mathbb{R}, \mathrm{d}_s)$, on remarque que $\{1\}$ est connexe par arcs (puisque l'unique chemin possible est celui constant à 1) alors que $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$.

Cette proposition nous donne déjà accès au résultat très intéressant suivant.

Exemple 6.2. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes. En effet, supposons que l'on ait un homéomorphisme φ entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$. On remarque alors, puisque φ est bijective, que $\varphi(\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}) = \mathbb{R} \setminus \{\varphi(0,0)\}$. Or $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est connexe par arcs. En effet, si $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, alors, si z_1 et z_2 ne sont pas colinéaires, on remarque que le segment $[z_1, z_2]$ ne rencontre pas $(0,0)$ (car sinon, il existerait un certain $t \in]0,1[$ tel que $0 = tz_1 + (1-t)z_2$, donc z_1 et z_2 seraient colinéaires). Si z_1 et z_2 sont colinéaires, par exemple $z_2 = \lambda z_1$, avec $\lambda \neq 0$, si par exemple $x_1 \neq 0$, on fait un arc de cercle qui relie z_1 à z_2. On devrait donc avoir que $\mathbb{R} \setminus \{\varphi(0,0)\}$ devrait aussi être connexe par arcs puisque φ est continue. Ceci est absurde car $\mathbb{R} \setminus \{\varphi(0,0)\}$ n'est pas connexe par arcs.

6.2 Connexité

Dans cette partie, nous étendons la notion de connexité par arcs, introduite dans le paragraphe précédent.

6.2.1 Définition et caractérisations équivalentes

Définition 6.5. Un espace métrique (X, d) est *connexe* s'il n'existe pas deux ouverts $U_1, U_2 \subset X$, $U_1, U_2 \neq \varnothing$, tels que $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ et $U_1 \cup U_2 = X$.

Une partie $A \subset X$ est connexe si $(A, \mathrm{d}_{|A})$ est connexe.

On peux simplifier la définition ci-dessus avec la notion suivante.

Définition 6.6. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Une partie $B \subset A$ est dite être un *ouvert relatif de A* si elle est ouverte dans $(A, \mathrm{d}_{|A})$. Autrement dit, s'il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $B = U \cap A$. Il en est de même pour les fermés.

On a donc la proposition suivante. On rappelle qu'on a déjà observé que X et $\varnothing$ sont à la fois ouverts et fermés. C'est donc immédiat que A et $\varnothing$ sont à la fois ouverts et fermés relatifs de $A \subset X$.

Proposition 6.4. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors, $A \subset X$ est connexe si et seulement si l'une ou l'autre des propositions suivantes est vérifiée :*

i. Il n'existe pas de partition de A en deux ouverts relatifs ;
ii. Il n'existe pas de partition de A en deux fermés relatifs ;
iii. Les seuls *ensembles à la fois ouverts et fermés relatifs de A sont A lui-même et l'ensemble vide.*

Démonstration. Observons que A n'est pas connexe si et seulement s'il existent deux ouverts tels que $U_1, U_2 \subset X$, $U_1 \cap A, U_2 \cap A \neq \varnothing$, et $A \cap (U_1 \cup U_2) = A$. Comme $U_1 \cap A$ et $U_2 \cap A$ sont des ouverts relatifs de A, ceci montre l'équivalence de la connexité et de la première proposition.

Supposons maintenant que A ne satisfait pas *i.* et soit $\{A_1, A_2\}$ la partition de A en deux ouverts relatifs. Alors, $A_1 = U_1 \cap A$ pour un ouvert $U_1 \subset X$, et donc $F_1 = A \setminus A_1 = (X \setminus U_1) \cap A$ est un fermé relatif. De même étant vrai pour $F_2 = A \setminus A_2$, montrons que $\{F_1, F_2\}$ est une partition de A. Ceci est immédiat, car $A = A_1 \cup A_2$ et donc $F_1 = A_2$ et $F_2 = A_1$. On a donc montré que *ii.* implique *i.*. Le même argument (en échangeant le rôle des ouverts et des fermés) peut être utilisé pour montrer que *i.* implique *ii.*.

Pour completer la preuve, on observe que l'argument ci-dessus montre que *i.* implique que tout éléments de la partition en ouverts relatifs sont à la fois ouverts et fermés, ce qui montre que *i.* est équivalent à *iii.*. □

Remarque 6.5. Intuitivement, on peut interpréter les connexes de la façon suivante : un ensemble est connexe s'il est en seul "morceau". Par exemple, $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe (il est en deux morceaux : $\mathbb{R}^*_+$ et $\mathbb{R}^*_-$).

6.2.2 Connexité et continuité

La propriété suivante est l'analogue de la Proposition 6.3

Proposition 6.5. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soit $F : X \to Y$ une application continue, et soit $A \subset X$ une partie connexe. Alors, $f(A)$ est connexe dans Y.*

Démonstration. Supposons que $f(A)$ ne soit pas connexe. Donc, ils existent $V_1, V_2 \subset Y$ tels que $V_1 \cap A, V_2 \cap A \neq 0$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ et $V_1 \cup V_2 \supset f(A)$. Par continuité, on a donc que $U_1 = f^{-1}(V_1)$ et $U_2 = f^{-1}(V_2)$ sont ouverts à intersection non-vide avec A. C'est immédiat de vérifier que $U_1 \cap U_2 = f^{-1}(V_1 \cap V_2) = \varnothing$ et que $U_1 \cup U_2 = f^{-1}(V_1 \cup V_2) \supset A$. Donc, A n'est pas connexe. □

On dispose de la caractérisation suivante de la convexité, qui est très utile en pratique. Dans la suite, on note $D = \{0, 1\}$, que l'on munira de la distance discrète d_{discr}.

Proposition 6.6. *Un espace métrique* (X, d) *est connexe si et seulement si tout application continue* $f : X \to D$ *est constante.*

Démonstration. On suppose que X est connexe. Soit $f : X \to D$. Alors $f(X)$ est connexe. On a soit $f(X) = \{0\}$, soit $f(X) = \{1\}$, soit $f(X) = \{0, 1\}$. Or D n'est pas connexe. En effet, toute partie pour la distance discrète étant ouverte, on a $D = \{0\}ccup\{1\}$, qui est une partition de D en deux ouverts. Donc on a soit $f(X) = \{0\}$, soit $f(X) = \{1\}$, ce qui dit bien que f est constante.

Inversement, si X n'est pas connexe, alors $X = O_1 \cup O_2$ avec O_1 et O_2 deux ouverts disjoints. On définit alors $f : x \in O_1 \mapsto f(x) = 0$ et $f : x \in O_2 \mapsto f(x) = 1$. f est continue puisque l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert, mais elle est non constante. On a donc le résultat voulu par contraposée. □

De la proposition précédente, on peut déduire les deux résultats suivants.

Proposition 6.7. *Soit* A *une partie connexe d'un espace métrique* (X, d)*, et* B *une autre partie de* X *vérifiant* $A \subset B \subset \overline{A}$*. Alors* B *est connexe.*

Démonstration. On utilise la caractérisation précédente. Soit $f : B \to D$ une application continue. Comme A est connexe, $f_{|A}$ est constante. Supposons par exemple que $f_{|A} = 0$ (le raisonnement est identique si $f_{|A} = 1$). Soit maintenant $x_0 \in B$. Comme $B \subset \overline{A}$, par caractérisation topologique de la continuité, il existe un voisinage V de x_0 dans B tel que $\mathrm{d}_{discr}(f(x), f(x_0)) < 1/2$ pour tout $x \in V$. Par définition de la distance discrète, ceci signifie que pour tout $x \in V$, on a $f(x) = f(x_0)$. Or $B \subset \overline{A}$, donc par caractérisation topologique de l'adhérence, il existe un certain $x_1 \in V \cap A$. Comme $x_1 \in A$, on a $f(x_1) = 0$. Donc f est constante et B est bien connexe. □

On a donc notamment le résultat suivant.

Corollaire 6.8. *L'adhérence d'une partie connexe est connexe.*

On a aussi les résultats suivants sur l'union de connexes.

Proposition 6.9. *Soit* $(C_i)_{i \in I}$ *une famille quelconque de connexes d'un espace métrique* (X, d) *telle qu'il existe un certain* i_0 *vérifiant : pour tout* $i \in I$*, on a* $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$*. Alors* $\bigcup_{i \in I} C_i$ *est connexe.*

Démonstration. Soit $f : \bigcup_{i \in I} C_i \to D$ une application continue. Pour tout $i \in I$, $f_{|C_i} :\to D$ est une application continue sur le connexe C_i, donc elle est constante. En particulier f est constant sur C_{i_0}, disons qu'elle vaut 0 sur C_{i_0}. Alors, si $x \in C_{i_0} \cap C_i$, on a donc $f(x) = 0$. f étant constante sur C_i, on a $f(x) = 0$ sur C_i, et ceci pour tout $i \in I$ et donc f est constante partout sur $\bigcup_{i \in I} C_i$. □

Dans le cas fini ou dénombrable, on a le résultat plus fort suivant.

Proposition 6.10. *Soit* $(C_i)_{i \in I}$ *une famille finie ou dénombrable de connexes (avec* $I = 0, \ldots, p$ *ou* $I = \mathbb{N}$ *d'un espace métrique* (X, d) *telle qu'il existe un certain* i_0 *vérifiant : pour tout* $i > 0$*, on a* $C_i \cap C_{i-1} \neq \emptyset$*. Alors* $\bigcup_{i \in I} C_i$ *est connexe.*

Démonstration. Soit $f : \bigcup_{i\in I} C_i \to D$ une application continue. Pour tout $i \in I$, $f_{|C_i} :\to D$ est une application continue sur le connexe C_i, donc elle est constante. Comme $C_i \cap C_{i-1} \neq \emptyset$, on en déduit que $f_{|C_{i-1}} = f_{|C_i}$. Une récurrence permet alors de conclure. □

De la même manière que nous avons procédé pour la connexité par arcs, on peut caractériser les connexes de $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_s)$.

Proposition 6.11. *La partie $A \subset \mathbb{R}$ est connexe dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_s)$ si et seulement si c'est un intervalle.*

Démonstration. Si A n'est pas un intervalle, il existe $(a, b) \in A$ et $c \in]a, b[$ tel que $c \notin A$. Dans ce cas, $A \subset] - \infty, c[\cup]c, +\infty[$ donc A ne peut pas être connexe. La réciproque est nettement plus délicate.

Traitons d'abord le cas d'un intervalle ouvert $I =]a; b[$. Soit $f : I \to D$ une application continue. Si elle n'est pas constante, il existe $x < y$ dans I tels que $f(x) \neq f(y)$, par exemple $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. On considère alors l'ensemble

$$\Gamma = \{z \in I |\ z \geqslant x, \forall t \in [x, z], f(t) = 0\}.$$

Γ est un ensemble non vide de $\mathbb{R}$ puisqu'il contient x. De plus, Γ est majoré puisque pour tout $z \in \Gamma$, on a $z \leqslant y$. On en déduit donc que Γ admet une borne supérieure finie c. Comme f est continue et que f vaut 0 sur Γ, on a que $f(c) = 0$. Or f est continue en c, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, on ait $\mathrm{d}_{discr}(f(x), f(x_0)) < 1/2$. Notamment $f(x) = 0$ pour tout $x \in [c, c + \varepsilon]$, o-donc $c + \varepsilon \in \Gamma$, ce qui contredit la définition de c. Donc tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est connexe. Un intervalle quelconque étant toujours compris entre son intérieur et son adhérence, on conclut qu'il est connexe.
□

On en déduit immédiatement la généralisation suivante du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 6.12. *Soit (X, d) un espace métrique connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(X)$ est un intervalle.*

6.2.3 Connexité et connexité par arcs

La propriété qui suit va nous permettre de faire le lien entre les ensembles connexes et connexes par arcs.

Proposition 6.13. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ une de ses parties. Si A est connexe par arcs, alors il est connexe.*

Démonstration. Soit $f : A \to D$ une application continue. Soient $a, b \in A$. Il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \to A$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Alors $f \circ \gamma$ est continue, donc constante car $[0, 1]$ est connexe. Donc on a notamment que $f(a) = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = f(b)$. Ceci étant vrai pour tous $a, b \in A$, on a bien que f est constante, et A est bien connexe. □

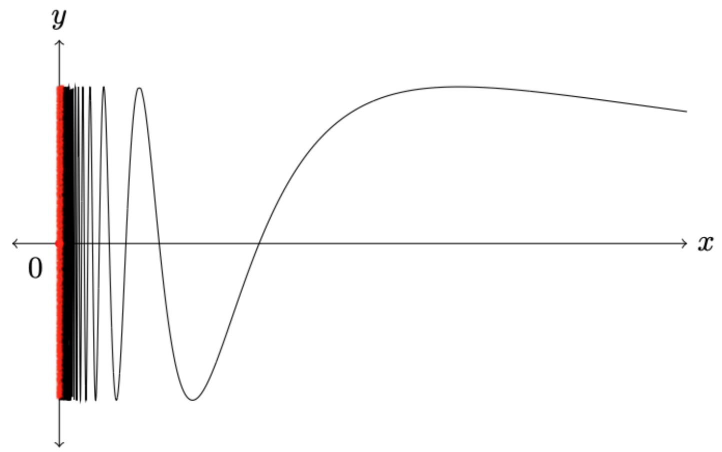

FIGURE 6.1 – La courbe du topologue [2].

On présente une démonstration alternative, basée sur la proposition 6.9.

Démonstration alternative. On se réduit au cas $A = X$ (ce qui est toujours possible en regardant la topologie induite), et on fixe $x \in X$. Comme X est connexe par arcs, pour tout $y \in X$, il existe un chemin $\gamma_x : [0,1] \to X$ qui relie x et y. Donc on peut couvrir X avec les images de ces chemins :

$$X = \bigcup_{y \in X} \gamma_x([0,1]). \tag{6.2}$$

Observons que $\gamma_x([0,1])$ est connexe par la Proposition 6.5, car γ_x est continue et $[0,1]$ est connexe. De plus,

$$\bigcap \gamma_x([0,1]) = \{x\} \neq \varnothing. \tag{6.3}$$

Donc, X est connexe en appliquant la Proposition 6.9. □

Même si c'est surprenant, le résultat précédent n'admet pas de réciproque en général si l'ensemble que l'on regarde n'est pas ouvert. En effet, on va donner ici un exemple de partie de $\mathbb{R}^2$ connexe mais pas connexe par arcs. L'exposition et les figures de cette partie sont prises de [2].

Exemple 6.3 (Courbe du topologue)**.** On pose (voir Figure 6.1)

$$G_0 = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x \in (0,1] \right\}, \qquad G = \overline{G_0} = \big(\{0\} \times [-1,1]\big) \cup G_0. \tag{6.4}$$

Par l'Exercice 6.1, on sait que G_0 est connexe par arcs, et donc connexe. Donc G est connexe puisque c'est l'adhérence d'une partie connexe.

Montrons que G n'est pas connexe par arcs, en montrant qui n'existe pas des chemins continus qui relient le point $p_0 = (0,0)$ à un point $p_1 = (x_1, \sin \frac{1}{x_1})$ avec $x_1 > 0$. On

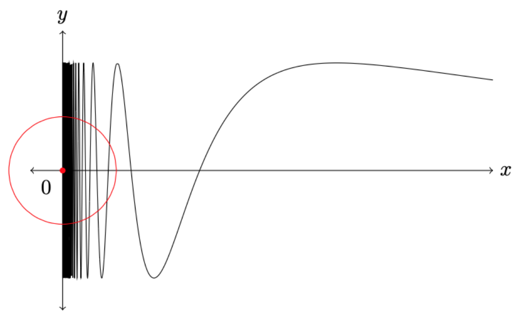

Figure 6.2 – Représentation graphique du voisinage donné par (6.6) dans le cas où $\gamma(t_0) = (0,0)$. Figure tirée de [2].

raisonne par l'absurde, et on suppose qu'il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to G$, continu et telle que $\gamma(0) = p_0$ et $\gamma(1) = p_1$. Soit maintenant $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\pi_1(x,y) = x$, qui est continue, et posons

$$t_0 = \inf\{t > 0 \mid \pi_1 \circ \gamma(t) > 0\}. \tag{6.5}$$

On a donc $\pi_1 \circ \gamma(t) = 0$ si $t < t_0$. Par continuité de $\pi_1 \circ \gamma$, on a que $\pi_1 \circ \gamma(t_0) = \lim_{t \to t_0^-} \pi_1 \circ \gamma(t) = 0$ (on n'a pas forcément, par contre, $\gamma(t_0) = p_0$). Par continuité de γ, on peut donc choisir $\delta > 0$ tel que (voir Figure 6.2)

$$t \in [t_0, t_0 + \delta) \implies \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|_2 < \frac{1}{2}. \tag{6.6}$$

Puisque t_0 est un infimum, pour le même $\delta > 0$ on trouve $t_1 \in [t_0, t_0 + \delta)$ tel que $a := \pi_1 \circ \gamma(t_1) > 0$. Or, l'image $\pi_1 \circ \gamma([t_0, t_1]) \subset \mathbb{R}$ est connexe et contient $0 = \pi_1 \circ \gamma(t_0)$ et $a = \pi_1 \circ \gamma(t_1)$. Puisque les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, on a donc

$$[0, a] \subset \pi_1 \circ \gamma([t_0, t_1]). \tag{6.7}$$

Ceci et (6.6) contredisent la continuité de $\pi_1 \circ \gamma$. En effet, $\sin 1/t$ est en train de sortir et rentrer du cercle rouge en Figure 6.2, donné par (6.6), et donc l'image des coordonnées x de γ sur $[t_0, t_1]$ ne peut pas être un intervalle tout entier. Dans la suite on va formaliser cette idée.

On rappelle que $\sin\theta = 1$ si et seulement si $\theta = (4k+1)\pi/2$ et $\sin\theta = -1$ si et seulement si $\theta = (4k-1)\pi/2$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Donc, si on pose $\xi_k = \frac{2}{(4k+1)\pi}$ et $\eta_k = \frac{2}{(4k-1)\pi}$ pour $k \in \mathbb{N}$, on a que

$$\left(\xi_k, \sin\frac{1}{\xi_k}\right) = (\xi_k, 1) \qquad \text{et} \qquad \left(\eta_k, \sin\frac{1}{\eta_k}\right) = (\eta_k, -1). \tag{6.8}$$

Comme $\lim_k \xi_k = \lim_k \eta_k = 0$, ceci prouve qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\xi_k, \eta_k \in [0, a]$ pour $k > K$. En particulier, par (6.7), ils existent $s_1, s_2 \in [t_0, t_1]$ tels que $\gamma(s_1) = (x_1, 1)$ et

$\gamma(s_2) = (x_2, -1)$ pour $x_1, x_2 > 0$. En particulier, $\|\gamma(s_1) - \gamma(s_2)\|_2 \geq \sqrt{1^2 - (-1)^2} = \sqrt{2} > 1$. Ceci donne une contradiction, car par (6.6) on a

$$\|\gamma(s_1) - \gamma(s_2)\|_2 \leq \|\gamma(s_1) - \gamma(t_0)\|_2 + \|\gamma(t_0) - \gamma(s_2)\|_2 < 1. \tag{6.9}$$

Donc, γ ne peut pas être continue, et G n'est pas connexe par arcs.

On termine notre discours sur la connexité avec cette réciproque partiel de la Proposition 6.13.

Théorème 6.14. *Soit $(E, \mathfrak{n})$ un evn et soit $A \subset E$ une partie ouverte. Alors, A est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.*

Démonstration. Par la Proposition 6.13 il nous suffit de démontrer que si $A \subset E$ est ouvert et connexe alors il est connexe par arcs. À cet effet, on fixe $x \in A$ et on pose

$$U_x = \{y \in A \mid \text{existe un chemin (continu) dans } A \text{ qui relie } x \text{ à } y\}. \tag{6.10}$$

Il est alors suffisant de montrer $U_x = A$: en effet, une fois que l'on sait relier un point fixé x à tout autre point y, pour n'importe quel autre $z \in A$, il suffit de concaténer un chemin allant de z à x avec un chemin allant de x à y. À cet effet, on montrera que U et $V = A \setminus U$ sont ouverts, ce qui nous donnera une partition de A en deux ouverts à intersection vide. Comme $x \in U$, on a que $U \neq \varnothing$, et donc la connexité de A impliquera que $V = \varnothing$ ou (d'une façon équivalente) que $U = A$.

Montrons que U est ouvert. Comme $U \subset A$, pour tout $y \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset A$. $B(y, r)$ est convexe, donc connexe par arcs. Donc, tout $z \in B(y, r)$ est relié à y par un chemin continu. Comme $y \in U$, il existe un chemin continue reliant x à y et donc, par concaténation, il existe aussi un chemin continu reliant x à z. Ceci montre que $B(y, r) \subset U$ et donc que U est ouvert.

Montrons maintenant que $V = A \setminus U$ est ouvert. Soit $y \in V$, c'est-à-dire, supposons qu'il n'existe pas de chemins continus reliant x à y. Comme $V \subset A$, il existe $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset A$. Supposons, par l'absurde, que $B(y, r) \not\subset V$. Ceci est équivalent à l'existence de $z \in B(y, r) \cap U$. Mais alors, il existe un chemin qui relie x à z et, comme $B(y, r)$ est connexe par arcs, il existe aussi un chemin qui relie z à y. Ceci donne un chemin qui relie x à y, et donc montre que $y \in U$, ce qui contredit l'hypothèse $y \in V$. Donc V est ouvert. □

Remarque 6.6. Le théorème précédent reste vrai si on remplace l'evn $(E, \mathfrak{n})$ par un espace métrique (X, d) qui soit *localement connexe par arcs*, c'est-à-dire tel que

$$\forall x \in X \quad \exists R > 0 \text{ tel que } B(x, r) \text{ est connexe par arcs pour tout } r < R. \tag{6.11}$$

6.3 Exercices

Connexité par arcs

Exercice 6.1. (*) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue (par rapport à $\mathrm{d_s}$). Montrer que le graphe

$$G = \{(t, f(t)) \mid t \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2, \tag{6.12}$$

est connexe par arcs.

Exercice 6.2. (*) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. On souhaite démontrer à l'aide de la connexité par arcs le résultat classique suivant : si f est continue et injective, alors f est strictement monotone. Pour cela, on pose

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\} \quad \text{et} \quad F(x,y) = f(x) - f(y). \tag{6.13}$$

1. Démontrer que $F(C)$ est un intervalle.
2. Conclure.

Exercice 6.3. (**) Dans un evn $(E, || \cdot ||)$, montrer que l'extérieur d'une boule fermée est connexe par arcs.

Connexité

Exercice 6.4. (*)Déterminer les parties connexes de

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq y\} \;\; \text{et} \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | x \neq y\}.$$

Exercice 6.5 (Théorème de Darboux, version topologique)**.** (**)Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable (mais pas forcément de classe C^1). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. En considérant

$$\Gamma = \{\frac{f(x) - f(y)}{x - y} | x, y \in I, x \neq y\},$$

montrer que $f'(I)$ est un intervalle. On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.

Exercice 6.6. (**)On pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}$. On considère $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer qu'il existe deux points diamétralement opposés de $\mathbb{U}$ qui ont la même image par f.

Exercice 6.7. (**)On pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}$. Montrer qu'il existe une surjection continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{U}$ mais qu'il n'existe pas d'injection continue de $\mathbb{U}$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 6.8. (**) On dit qu'un espace métrique est *totalement discontinu* si seulement l'ensemble vide et les singletons sont connexes. Montrer que :

1. $(X, \mathrm{d}_{\mathrm{discr}})$ est totalement discontinu.
2. $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, comme partie de $(\mathbb{R}, \mathrm{d_s})$, est totalement discontinu.
3. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est totalement discontinu.

Exercice 6.9 (Théorème du passage à la douane)**.** Soit (X, d) un espace métrique. Soit B une partie connexe de X, et A une partie quelconque de X.

1. Montrer que $E \setminus Fr(A) = \mathring{A} \cup (E \overset{\circ}{\setminus} A)$.
2. En déduire que si B intersecte $\mathring{A}$ et $(E \overset{\circ}{\setminus} A)$, alors il intersecte $Fr(A)$.

Exercice 6.10. Soit (X, d) un espace métrique et $x, y \in X$. On dit qu'il existe une ε-chaine reliant x à y s'il existe $x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ un nombre fini de points de X tels que $\mathrm{d}(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$. On dit que X est bien enchaîné si, pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $x, y \in X$, il existe une ε-chaine reliant x à y. Pour $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, on pose $A(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid \text{ il existe une } \varepsilon\text{-chaine reliant } x \text{ à } y\}$.

1. Démontrer que A est ouvert et fermé.
2. En déduire que si X est connexe, alors X est bien enchainé.
3. La réciproque est-elle vraie ?
4. On suppose que X est compact et bien enchaîné. Démontrer que X est connexe.

7 Applications linéaires et continuité

Dans cette partie, nous étudions l'espace des fonctions linéaires et continues entre deux evn $(E, \mathfrak{n}_E)$ et $(F, \mathfrak{n}_F)$. En particulier, on le caractérisera et on montrera que lui-même est un evn .

7.1 Application linéaires continues

7.1.1 Caractérisations de la continuité

Définition 7.1. Soient E et F deux espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est *linéaire* si :

i. Pour tout $x, y \in E$ on a $f(x+y) = f(x) + f(y)$;
ii. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$ on a $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est dénoté $\mathcal{L}_c(E, F))$. Lorsque E et F sont des evn , on notera $\mathcal{L}_c(E, F)) \subset \mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des fonctions linéaires et continues de E dans F.

Théorème 7.1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :*

i. $f \in \mathcal{L}_c(E, F))$;
ii. f *est continue en* 0_E ;
iii. f *est bornée sur* $B_E(0_E, 1)$;
iv. f *est bornée sur* $\mathcal{S} = \{x \in E \mid \mathfrak{n}_E(x) = 1\}$;
v. Il existe $k > 0$ *tel que* $\mathfrak{n}_F(f(x)) \leq k\mathfrak{n}_E(x)$ *pour tout* $x \in E$;
vi. f *est lipschitzienne.*

Démonstration. On démontrera les propriétés dans l'ordre.
i. $\Longrightarrow$ *ii.* Par définition, car f est continue si elle est continue en tout point.
ii. $\Longrightarrow$ *iii.* Par continuité en 0, en choisissant $\varepsilon = 1$ dans la définition, on obtient

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } \mathfrak{n}_F(f(x)) \leq 1 \text{ si } \mathfrak{n}_E(x) \leq \delta. \tag{7.1}$$

Ici, on a utilisé le fait que si $f \in \mathcal{L}_c(E, F))$, alors $f(0_E) = 0_F$. Soit à présent $y \in B_E(0_E, 1)$, *i.e.* $\mathfrak{n}_E(y) \leq 1$, et posons $x = \delta y$. Donc, $\mathfrak{n}_E(x) = \delta\mathfrak{n}_E(y) \leq \delta$. En vertu de (7.1), comme $y = x/\delta$ on en déduit que

$$\mathfrak{n}_F(f(y)) = \mathfrak{n}_F\left(\frac{f(x)}{\delta}\right) = \frac{\mathfrak{n}_F(f(x))}{\delta} \leq \frac{1}{\delta} \qquad \forall y \in B_E(0_E, 1). \tag{7.2}$$

iii. $\implies$ *iv.* Immédiat, car $\mathcal{S} \subset B_E(0_E, 1)$.
iv. $\implies$ *v.* L'énoncé est vrai pour tout $k > 0$ si $x = 0_E$, donc on suppose $x \neq 0_E$. Par hypothèse, il existe $k > 0$ tel que $\mathfrak{n}_F(f(y)) \leq k$ si $\mathfrak{n}_E(y) = 1$. On pose $y = x/\mathfrak{n}_E(x)$, en sorte que $\mathfrak{n}_E(y) = 1$, et on obtient

$$\mathfrak{n}_F(f(x)) = \mathfrak{n}_F\left(\frac{f(x)}{\mathfrak{n}_E(x)}\mathfrak{n}_E(x)\right) = \mathfrak{n}_F(y)\mathfrak{n}_E(x) \leq k\mathfrak{n}_E(x), \qquad \forall x \in E \neq \{0_E\}. \tag{7.3}$$

v. $\implies$ *vi.* Il suffit d'observer que pour tout $x, y \in E$ on a

$$\mathfrak{n}_F(f(x) - f(y)) = \mathfrak{n}_F(f(x-y)) \leq \mathfrak{n}_E(x-y). \qquad \square$$

7.1.2 L'espace vectoriel normé $\mathcal{L}_c(E, F)$

Le théorème précédent nous permet d'introduire une définition de norme d'une application linéaire continue. À cet effet, on prouve le résultat suivant.

Proposition 7.2. *Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F))$, une fonction linéaire et continue. Posons*

$$\mathfrak{N}_1 = \sup_{x \in E\setminus\{0_E\}} \frac{\mathfrak{n}_F(f(x))}{\mathfrak{n}_E(x)}, \qquad \mathfrak{N}_2 = \sup_{\mathfrak{n}_E(x)=1} \mathfrak{n}_F(f(x)), \qquad \mathfrak{N}_3 = \sup_{x \in B_E(0_E,1)} \mathfrak{n}_F(f(x)),$$
$$\mathfrak{N}_4 = \inf\left\{k > 0 \mid \mathfrak{n}_F(f(x)) \leq k\mathfrak{n}_E(x) \quad \forall x \in E\right\}.$$

Alors, $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_3 = \mathfrak{N}_4$.

Démonstration. On remarque que tout les $\mathfrak{N}_i$, $i \in [\![1, 4]\!]$, sont finis, en vertu du Théorème 7.1 On procède en établissant des inégalités :
$\mathfrak{N}_1 \leq \mathfrak{N}_2$: Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Alors $y = x/\mathfrak{n}_E(x)$ est tel que $\mathfrak{n}_E(y) = 1$. Donc,

$$\frac{\mathfrak{n}_F(f(x))}{\mathfrak{n}_E(x)} = \mathfrak{n}_F\left(\frac{f(x)}{\mathfrak{n}_E(x)}\right) = \mathfrak{n}_F(f(y)) \leq \sup_{\mathfrak{n}_E(z)=1} \mathfrak{n}_F(f(z)) = \mathfrak{N}_2. \tag{7.4}$$

Un passage au supremum fournit l'inégalité souhaitée.
$\mathfrak{N}_2 \leq \mathfrak{N}_3$: Immédiat par définition du supremum, car $\{x \in E \mid \mathfrak{n}_E(x) = 1\} \subset B_E(0_E, 1)$.
$\mathfrak{N}_3 \leq \mathfrak{N}_4$: Par définition de $\mathfrak{N}_4$ on a $\mathfrak{n}_F(f(x)) \leq \mathfrak{N}_4\mathfrak{n}_E(x)$ pour tout $x \in E$. En particulier, si $x \in B_E(0_E, 1)$, ceci donne $\mathfrak{n}_F(f(x)) \leq \mathfrak{N}_4$. Un passage au supremum fournit l'inégalité souhaitée.
$\mathfrak{N}_4 \leq \mathfrak{N}_1$: Pour tout $x \in E$, $x \neq 0_E$ on a

$$\mathfrak{n}_F(f(x)) = \frac{\mathfrak{n}_F(f(x))}{\mathfrak{n}_E(x)}\mathfrak{n}_E(x) \leq \sup_{y \in E\setminus\{0_E\}} \left[\frac{\mathfrak{n}_F(f(y))}{\mathfrak{n}_E(y)}\right] \mathfrak{n}_E(x) = \mathfrak{N}_1\mathfrak{n}_E(x) \tag{7.5}$$

Cette inégalité reste vrai aussi pour $x = 0_E$, et donc

$$\mathfrak{N}_1 \in \left\{k > 0 \mid \mathfrak{n}_F(f(x)) \leq k\mathfrak{n}_E(x) \quad \forall x \in E\right\}. \tag{7.6}$$

Ceci implique l'inégalité souhaitée, par définition de $\mathfrak{N}_4$. $\square$

On en déduit notamment la caractérisation suivante des applications linéaires non continues, qui est utile en pratique pour démontrer qu'une application linéaire n'est pas continue.

Corollaire 7.3. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors, f n'est pas continue si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $S(0,1)$ telle que $||f(x_n)||_F \to +\infty$ quand $n \to \infty$.*

Démonstration. f n'est pas continue si et seulement si f n'est pas bornée sur $S(0,1)$, *i.e* si et seulement si $\sup_{\mathfrak{n}_E(x)=1} \mathfrak{n}_F(f(x)) = +\infty$. La caractérisation séquentielle du sup permet alors de conclure. □

Une manière générale de démontrer qu'une application n'est pas continue est donc de considérer une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ quelconque non nulle, de la normaliser, puis de montrer que la suite des images tend vers $+\infty$.

La proposition précédente justifie la notion suivante.

Définition 7.2. Pour tout $f \in \mathcal{L}_c(E,F))$ on pose

$$|||f||| = \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_3 = \mathfrak{N}_4. \tag{7.7}$$

On appel $|||\cdot|||$ la norme subordonnée aux normes de E et F, ou norme triple, ou encore norme d'opérateur.

Théorème 7.4. *$\mathcal{L}_c(E,F))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F))$ et $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F))$.*

Démonstration. Comme il est évident que $\mathcal{L}_c(E,F)) \neq \varnothing$, car il contient toujours l'application identiquement nulle, et que $\lambda f \in \mathcal{L}_c(E,F))$ si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}_c(E,F))$, pour que $\mathcal{L}_c(E,F))$ soit un sev de $L_c(E,F))$ on doit montrer seulement que $f+g \in \mathcal{L}_c(E,F))$ si $f,g \in \mathcal{L}_c(E,F))$. À cet effet on observe que

$$\mathfrak{n}_F(f(x)+g(x)) \leq \mathfrak{n}_F(f(x)) + \mathfrak{n}_F(g(x)) \leq (|||f|||+|||g|||)\,\mathfrak{n}_E(x), \qquad \forall x \in E. \tag{7.8}$$

En passant au supremum pour les x tels que $\mathfrak{n}_E(x) = 1$, on obtient donc $|||f+g||| \leq |||f||| + |||g|||$. Ceci montre que $|||f+g||| < +\infty$, et donc $f+g \in \mathcal{L}_c(E,F)$.

On vient en effet de démontrer l'inégalité triangulaire de la norme triple, les autres propriétés sur cette norme étant aisées à vérifier. □

Attention, il se peut qu'une application linéaire soit continue pour certaines normes mais pas pour d'autres.

Exemple 7.1. Regardons un cas où on change la norme de départ mais pas celle d'arrivée. On considère $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}$. On munit E de la norme $||\cdot||_\infty$ et F de la valeur absolue. On considère la forme linéaire $\varphi : f \in E \mapsto f(0)$. Elle est continue puisque $|\varphi(f)| = |f(0)| \leqslant ||f||_\infty$. Par contre, si l'on considère maintenant E muni de $||\cdot||_1$, φ n'est plus continue. En effet, On peut trouver des fonctions continues de norme 1 égale à 1 qui ont une valeur en 0 arbitrairement grande. Il suffit par exemple de prendre, pour $n \geqslant 2$, $f_n(x) = n(1-x/n)$ sur $[0,1/n]$, prolongée par 0 sur $[1/n,1]$. Evidemment, f_n

est dans E pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Un petit calcul d'intégrale montre que $|f_n|_1 = 1 - 1/(2n^2)$, qui converge vers 1 quand $n \to \infty$. De plus, $f_n(0) = n \to +\infty$ quand $n \to \infty$. Donc si $g_n = f_n/||f_n||_1$, on a $||g_n||_1 = 1$ mais $|\varphi(g_n)| \to +\infty$.

On pourrait aussi trouver des exemples similaires dans le cas où on change la norme d'arrivée mais pas la norme de départ.

Théorème 7.5. *Si* $(F, \mathfrak{n}_F)$ *est un espace de Banach, alors* $(\mathcal{L}_c(E, F)), |||\cdot|||)$ *est également un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_c(E, F))$ une suite de Cauchy. Alors, pour $x \in E$ on a

$$\mathfrak{n}_F(f_n(x) - f_m(x)) \leq |||f_n - f_m|||\mathfrak{n}_E(x). \tag{7.9}$$

On déduit de cette inégalité que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ est une suite de Cauchy dans $(F, \mathfrak{n}_F)$. Par conséquent, elle est convergente et on note $f(x) \in F$ sa limite. Il faut maintenant montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction $f : E \to F$, ainsi définie, par rapport à la norme $|||\cdot|||$ et que $f \in \mathcal{L}_c(E, F))$.

Le fait que f soit linéaire (i.e., $f \in \mathcal{L}_c(E, F))$) découle tout simplement en passant à la limite dans la définition de linéarité pour f_n, $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in E, \qquad f_n(\lambda x + \mu y) = \lambda f_n(x) + \mu f_n(y). \tag{7.10}$$

Montrons que $|||f_n - f||| \to 0$ pour $n \to +\infty$. Car $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, on a que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad |||f_n - f_{n+p}||| \leq \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geq N, \, p \in \mathbb{N}. \tag{7.11}$$

Mais alors, pour ces valeurs de n, p, pour tout $x \in E$ on a

$$\mathfrak{n}_F(f_n(x) - f_{n+p}(x)) \leq \varepsilon \mathfrak{n}_E(x). \tag{7.12}$$

Un passage à la limite pour $p \to +\infty$, montre que $\mathfrak{n}_F(f_n(x) - f(x)) \leq \varepsilon \mathfrak{n}_E(x)$ pour tout $x \in E$ et $n \geq N$. Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad |||f_n - f||| \leq \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geq N. \tag{7.13}$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} |||f_n - f||| = 0$.

Pour terminer, montrons que f est bien continue. Mais on a

$$|||f||| \leq |||f_n - f||| + |||f_n|||. \tag{7.14}$$

Or, le premier terme à droite est assez petit qu'on veut, tandis que $|||f_n||| < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $f_n \in \mathcal{L}_c(E, F))$. Ceci montre que $|||f||| < +\infty$ et donc $f \in \mathcal{L}_c(E, F))$. $\square$

7.1.3 Quelques exemples de calculs de norme d'opérateur

Exemple 7.2. On considère une application linéaire $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $f \not\equiv 0$, et on se propose de calculer sa norme triple. On sait déjà que à une telle application linéaire est associé une matrice $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = Mx$. On montrera que

$$|||f||| = \max_{i,j\in[\![1,n]\!]} |m_{ij}|. \tag{7.15}$$

Pour tout vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$, en notant $(f(x))_i$ la composante i-éme de $f(x)$, on a

$$\begin{aligned}|(f(x))_i| = |(Mx)_i| = \left|\sum_{j=1}^n m_{ij}x_j\right| &\leq \sum_{j=1}^n |m_{ij}||x_j| \\ &\leq \max_{j\in[\![1,n]\!]} |m_{ij}| \sum_{j=1}^n |x_j| = \|x\|_1 \max_{j\in[\![1,n]\!]} |m_{ij}|. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Par conséquent,

$$\|f(x)\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |(f(x))_i| \leq \|x\|_1 \max_{i,j\in[\![1,n]\!]} |m_{ij}| \implies |||f||| \leq \max_{i,j\in[\![1,n]\!]} |m_{ij}|. \tag{7.17}$$

Pour montrer que l'inégalité ci-dessus est en effet une égalité on cherche donc $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\bar{x}\|_1 = 1$ et $\|f(\bar{x})\|_\infty = \max_{i,j\in[\![1,n]\!]} |m_{ij}|$. En effet, si un tel $\bar{x}$ existe, on a

$$|||f||| = \sup_{\|x\|_1=1} \|f(x)\|_\infty \geq \|f(\bar{x})\|_\infty = \max_{i,j\in[\![1,n]\!]} |m_{ij}|. \tag{7.18}$$

Ceci, avec (7.17), donne (7.15).

Soient $i_0, j_0 \in [\![1, n]\!]$ tels que $\max_{i,j\in[\![1,n]\!]} |m_{ij}| = |m_{i_0,j_0}|$. En particulier, comme $f \not\equiv 0$, on a $|m_{i_0,j_0}| > 0$. On pose $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ donné par

$$\bar{x}_i = \begin{cases} 1, & \text{si } i = i_0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}. \tag{7.19}$$

On a que $\|\bar{x}\|_1 = 1$ et

$$|(f(\bar{x}))_i| = |m_{i,j_0}| \implies \|f(\bar{x})\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |m_{i,j_0}| = |m_{i_0,j_0}|. \tag{7.20}$$

Par définition de (i_0, j_0) ceci montre que $\|f(\bar{x})\|_\infty = \max_{i,j\in[\![1,n]\!]} |m_{ij}|$.

Exemple 7.3. Soit $g \in C([0, 1])$. Considérons l'application $\Phi : (C([0, 1]), \|\cdot\|_2) \to (C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ donnée par

$$\Phi[f](x) = g(x)f(x), \qquad \forall f \in C([0, 1]). \tag{7.21}$$

Est évident que $\Phi \in \mathcal{L}(C([0, 1]), C([0, 1]))$. Montrons que elle est continue et calculons sa norme triple.

Soit $f \in C([0,1])$. En vertu de l'inégalité de Hölder (Lemme 1.8) étendue au fonctions continue, si on pose $q = 2$ on a

$$\begin{aligned}\|\Phi[f]\|_1 &= \int_0^1 |\Phi[f](x)|\,dx = \int_0^1 |g(x)f(x)|\,dx \\ &\leq \left(\int_0^1 |g(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = \|g\|_2\|f\|_2. \quad (7.22)\end{aligned}$$

Cela prouve donc que $|\!|\!|\Phi|\!|\!| \leq \|g\|_2$ et, en particulier, que Φ est continue.

Comme dans l'exemple précédent, pour montrer que en effet $|\!|\!|\Phi|\!|\!| = \|g\|_2$, on cherche $f_0 \in C([0,1])$ telle que $\|\Phi[f_0]\|_1 = \|g\|_2$. À cet effet, il nous suffit de poser $f_0 = g$, car on obtient

$$\|\Phi[g]\|_1 = \int_0^1 |g(x)|^2\,dx = \|g\|_2^2. \quad (7.23)$$

Exemple 7.4. On considère l'espace des polynômes $\mathbb{R}[x]$ avec la norme $\|\cdot\|_\infty$, et on fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|x_0| < 1$. Considérons l'application $f : (\mathbb{R}[x], \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ définie par

$$f(P) = P(x_0), \qquad \forall P \in \mathbb{R}[x]. \quad (7.24)$$

On démontrera que f est continue en calculant :

$$|\!|\!|f|\!|\!| = \frac{1}{1-|x_0|} < +\infty \quad (7.25)$$

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ s'écrivant sous la forme $P(x) = \sum_{n=0}^{\deg P} a_n x^n$. On rappelle que $\|P\|_\infty = \max_{i\in[\![1,\deg P]\!]} |a_n|$. On a donc,

$$|P(x_0)| = \left|\sum_{n=0}^{\deg P} a_n x_0^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\deg P} |a_n||x_0|^n \leq \|P\|_\infty \sum_{n=0}^{\deg P} |x_0|^n \leq \|P\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} |x_0|^n = \frac{\|P\|_\infty}{1-|x_0|}.$$

Ceci montre que $|\!|\!|f|\!|\!| \leq 1/(1-|x_0|)$ et, en particulier, que f est continue.

On se propose maintenant de montrer (7.25). Contrairement aux deux exemples précédents, ici on peut pas trouver[1] $\bar{P}$ tel que $|\bar{P}(x_0)| = 1/(1-|x_0|)$. Donc, on trouvera une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que $\sup_n |P_n(x_0)| = 1/(1-|x_0|)$ et $\|P_n\|_\infty = 1$. En effet, ceci montrera que

$$|\!|\!|f|\!|\!| = \sup_{\|P\|_\infty = 1} |P(x_0)| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |P_n(x_0)| = \frac{1}{1-|x_0|}. \quad (7.26)$$

Pour ce propos, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k x^k \qquad \text{oú} \qquad \varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0^k > 0, \\ 0 & \text{si } x_0^k = 0, \\ -1 & \text{si } x_0^k < 0. \end{cases} \quad (7.27)$$

1. Réfléchir à pourquoi.

On a donc $\|P_n\|_\infty = 1$ et

$$f(P_n) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k x_0^k = \sum_{k=0}^{n} |x_0|^k > 0. \tag{7.28}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f(P_n)| = \sum_{k=0}^{n} |x_0|^k$. Un passage à la limite montre que $\sup_n |f(P_n)| = 1/(1-|x_0|)$.

7.1.4 Le cas de la dimension finie

On montre maintenant un résultat fortement lié au Théorème 5.27.

Théorème 7.6. *On a que $\mathcal{L}_c(E,F)) = \mathcal{L}(E,F))$ si et seulement si $\dim E < +\infty$. Si $\dim E < \infty$, la norme triple est atteinte en (au moins) un élément de $S(0,1)$.*

Démonstration. Supposons que $\dim E < +\infty$ et considérons $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\{e_1,\dots,e_n\} \subset E$ une base quelconque. Donc, tout $x \in E$ s'écris d'une façon unique comme

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \qquad (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{7.29}$$

On pose maintenant

$$\|x\| := \sum_{i=1}^{n} |x_i|. \tag{7.30}$$

On peut montrer que $\|\cdot\|$ est une norme avec une preuve analogue à celle utilisé pour $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$.

Ceci donne

$$\mathfrak{n}_F(f(x)) = \mathfrak{n}_F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \mathfrak{n}_F(e_i) \le \|x\| \max_{i \in [\![1,n]\!]} \mathfrak{n}_F(e_i). \tag{7.31}$$

En particulier, en vertu de ce théorème, il existe $C > 0$ tel que $\|x\| \le C\mathfrak{n}_E(x)$, et donc

$$|\!|\!| f |\!|\!| \le C_1, \qquad \text{où} \qquad C_1 = C \max_{i \in [\![1,n]\!]} \mathfrak{n}_F(e_i) \in (0,+\infty). \tag{7.32}$$

Ceci implique que $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$. De plus, comme $|||f||| = \sup_{x \in S(0,1)} \mathfrak{n}_F(f(x))$, que $S(0,1)$ est compact et que $x \in S(0,1) \mapsto ||f(x)||_E$ est continue, elle est bornée et atteint ses bornes, notamment elle atteint sa borne supérieure, qui est exactement $|||f|||$.

Supposons maintenant que $\dim E = +\infty$ et construisons $f \in \mathcal{L}_c(E,F))$ non continue. Dans ce cas, il existe une famille libre $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tel que $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On décompose donc $E = V \oplus W$ où [2]

$$V = \mathrm{vec}\{(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\} = \left\{ \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n \mid N \in \mathbb{N},\, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\}, \tag{7.33}$$

2. On rappelle que l'espace engendré par une famille infinie $\mathcal{F}$ de vecteurs est obtenu en considérant toutes les combinaisons linéaires possibles avecun nombre finie d'éléments de $\mathcal{F}$. En effet, une combinaison linéaire avec un nombre infini de vecteurs ne peux pas être définie sans donner un concept de convergence de série, ce qui demande une norme.

et W est un supplémentaire algébrique quelconque de V dans E (éventuellement $W = \varnothing$). On admet l'existence d'un supplémentaire pour n'importe quel sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel. On fixe aussi $v \in F$, $\mathfrak{n}_F(v) = 1$ et on définie $f \in \mathcal{L}_c(E, F))$ en posant $f(e_n) = nv$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f|_W \equiv 0$. C'est-à-dire, comme $x \in E$ se décompose en $x = \sum_{n=1}^{N_x} \alpha_n e_n + x_W$ où $x_W \in W$,

$$f(x) = \left(\sum_{n=1}^{N_x} n\alpha_i\right) v \in F. \tag{7.34}$$

On a donc,

$$|||f||| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{n}_F(f(e_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} n\mathfrak{n}_F(v) = \sup_{n\in\mathbb{N}} n = +\infty. \tag{7.35}$$

Ceci implique que f n'est pas continue. □

On voit donc notamment que dans un espace de dimension infinie, il existe toujours des applications linéaires non continues.

7.1.5 Composition d'applications linéaires continues

Proposition 7.7. *Soit $(G, ||\cdot||_G)$ un troisième espace vectoriel normé. On considère $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et $|||g \circ f||| \leqslant |||g|||\,|||f|||$.*

Démonstration. Soit $x \in B_f(0, 1)$. Par définition de la norme triple de g, puis de la norme triple de f, on a $||g \circ f(x)||_G||g(f(x)|| \leqslant |||g|||\,||f(x)|| \leqslant |||g|||\,|||f|||\,||x|| \leqslant |||g|||\,|||f|||$. En passant au sup sur $x \in B_f(0, 1)$, on a bien par le Théorème 7.1 que $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E, G)$, et par définition de la norme triple, on a bien $|||g \circ f||| \leqslant |||g|||\,|||f|||$. □

Remarque 7.1. On peut avoir $|||g \circ f||| < |||g|||\,|||f|||$. Le cas le plus extrême est de se placer dans $E = F = G = \mathbb{R}^n$ et considérer un endomorphisme f nilpotent d'ordre 2, par exemple représenté dans la base canonique par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots 0 & 1 & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \\ & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, quelle que soit les normes choisies au départ sur E, comme on est en dimension finie, $f \in \mathcal{L}_c(E)$. De plus, $|||f||| \neq 0$, puisque f est non nul. Enfin, $A^2 = 0$, donc $f \circ f = 0$, donc $|||f \circ f||| = 0 < |||f|||^2$.

Corollaire 7.8. *Si $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est continue, inversible, et que $f^{-1} \in \mathcal{L}_c(F, E)$, alors $|||f^{-1}||| \geqslant \frac{1}{|||f|||}$.*

Démonstration. Elle est très simple : il suffit d'écrire $f \circ f^{-1} = Id_F$, remarquer que $|||Id_F||| = 1$ et utiliser le théorème précédent. □

Remarque 7.2. Attention, de manière générale, si $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et que f est inversible, rien n'assure que f^{-1} est continue (c'est vrai si E et F sont des espaces de Banach, mais ce résultat dépasse très largement le cadre du cours). Donnons un contre-exemple. On considère c_{00} l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l^∞. On munit donc c_{00} de la norme $||\cdot||_\infty$. On considère alors l'application

$$f : u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \mapsto (u_n/n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in c_{00}.$$

f est clairement linéaire. Elle est continue car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|u_n/n| \leqslant |u_n|$ donc $||f(u)||_\infty \leqslant ||u||_\infty$. Elle est injective car $f(u) = 0$ implique que pour tout n, $u_n/n = 0$, donc $u_n = 0$ donc $u = 0$ et $Ker(f) = \{0\}$. Est est surjective car on peut toujours résoudre l'équation $y_n = u_n/n$ par $u_n = ny_n$. Donc f est bijective et son inverse est donné par $f^{-1}(y) = (ny_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On remarque alors que f^{-1} n'est pas continue : si e_n est le n-ième vecteur de la base canonique, $||e_n||_\infty = 1$ mais $|f^{-1}(e_n)||_\infty = n \to +\infty$ quand $n \to \infty$.

7.2 L'algèbre normée $\mathcal{L}_c(E)$ et application aux matrices

7.2.1 La notion d'algèbre normée

Commençons par rappeler la notion d'algèbre.

Définition 7.3. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Une algèbre sur K est un ensemble $\mathcal{A}$ muni de deux lois de composition internes $+$ et $\times : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ et d'une loi de composition externe $\cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{A} :\to \mathcal{A}$ tels que :

1. $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau.
3. Pour tout $\lambda \in K$ et tout $x, y \in \mathcal{A}$, on a $\lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$ (ce qui permet d'écrire sans ambiguïté ce produit sous la forme $\lambda \cdot x \times y$).

Remarque 7.3. — Souvent, pour la multiplication, on oubliera comme d'habitude les $\cdot$ et $\times$, sachant qu'il n'y a pas d'ambiguïtés possibles.

— Notamment, $\times$ est bilinéaire, au sens suivant : pour tout $x, y, z, t \in \mathcal{A}$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$(x + \lambda y)(z + \mu t) = xz + \lambda yz + \mu xt + \lambda\mu xt.$$

Exemple 7.5. 1. $\mathbb{K}[X]$ est une algèbre pour l'addition de polynômes, la multiplication de polynômes, la multiplication par un scalaire d'un polynôme.

2. Si E est un $\mathbb{K}$- espace vectoriel, $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre pour l'addition de fonctions, la composition de fonctions, la multiplication par un scalaire d'une fonction.
3. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une algèbre pour l'addition de matrices, la multiplication de matrices, la multiplication par un scalaire d'une matrice.

Définition 7.4. Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ une algèbre sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $||\cdot||$ une norme sur $\mathcal{A}$ vu comme espace vectoriel. On dit que $(\mathcal{A}, ||\cdot||)$ est une algèbre normée si pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, on a $||ab|| \leqslant ||a||\,||b||$. On doit que $(\mathcal{A}, ||\cdot||)$ est une algèbre de Banach si de plus $(\mathcal{A}, ||\cdot||)$ est un espace de Banach.

On a alors la propriété de continuité suivante très importante.

Proposition 7.9. *Soit $(\mathcal{A}, ||\cdot||)$ est une algèbre normée. Si $a_n \to a$ quand $n \to \infty$ et $b_n \to b$ quand $n \to \infty$, alors $a_n b_n \to ab$ quand $n \to \infty$.*

Démonstration. On écrit

$$||a_n b_n - ab|| = ||a_n(b_n - b) + (a_n - a)b|| \leqslant ||a_n(b_n - b)|| + ||(a_n - a)b|| \leqslant ||a_n||\,||b_n - b|| + ||b||\,||a_n - a||.$$

Comme $||a_n - a|| \to 0$, $||b_n - b|| \to 0$ et que (a_n) est bornée, on en déduit que le membre de droite tend vers 0, et le résultat voulu. □

Exemple 7.6. L'exemple typique qu'il faut garder en tête est le suivant : si $(E, ||\cdot||)$ est un evn sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors $\mathcal{L}_c(E)$ est une algèbre normée. C'est une algèbre de Banach si E est un espace de Banach, comme vu précédemment.

7.2.2 Séries dans les espaces de Banach

Définition 7.5. Soit E un evn = sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de E. On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Cette série sera notée $\sum u_k$. S_n est appelé la somme partielle d'ordre n. On dit que la série $\sum u_k$ converge si S_n admet une limite quand $n \to +\infty$. Dans ce cas, la limite est notée $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Dans le cas des evn , on a une autre notion de convergence, appelée converge absolue.

Définition 7.6. Soit $(E, ||\cdot||)$ un evn sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que $\sum u_k$ est absolument convergente dans E si $\sum ||u_k||$ est convergente dans $\mathbb{R}$.

Le point crucial est le suivant.

Proposition 7.10. *Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace de Banach. Alors toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration. Soit $\sum u_k$ une série absolument convergente. Comme E est un espace de Banach, pour montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy. Pour ce faire, on considère, pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, une "tranche de Cauchy" $||S_{n+p} - S_n|| = ||\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k|| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} ||u_k|| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} ||u_k|| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} ||u_k||$. On reconnait dans le terme de droite le reste d'une série convergente, qui tend donc vers 0 quand $n \to +\infty$. L'application de la Proposition 4.4 assure donc que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy, ce qui conclut le raisonnement. □

Remarque 7.4. — La réciproque est fausse : la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente grâce au critère sur les séries alternées, mais n'est pas absolument convergente car la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge par critère de Riemann sur les séries.
— C'est une équivalence.

7.2.3 Quelques séries dans les algèbres de Banach

Proposition 7.11. *Soit $(\mathcal{A}, ||\cdot||)$ une algèbre de Banach dont l'élément unité est noté 1. Soit $a \in A$ tel que $||a|| < 1$. Alors $1-a$ est inversible dans $\mathcal{A}$ et $(1-a)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k$. De plus,*

$$||(1-a)^{-1}|| \leqslant \frac{1}{1-||a||}.$$

Démonstration. La série $\sum_{k=0}^{+\infty} a^k$ est normalement convergente. En effet, $||a^k|| \leqslant ||a||^k$ et $||a|| < 1$ donc $\sum ||a||^k$ est convergente, donc $\sum ||a^k||$ aussi. Ainsi, la série $\sum a^k$ converge dans $\mathcal{L}_c(E,F)$. On appelle S la somme de cette série et S_n sa somme partielle.

Par inégalité triangulaire,

$$||S_n|| \leqslant \sum_{k=0}^{n} ||a||^k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} ||a||^k = \frac{1}{1-||a||}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $||S|| \leqslant \frac{1}{1-||a||}$. Calculons maintenant

$$(1-a)S_n = S_n - aS_n = \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} = 1 - a^{n+1}.$$

Comme $||a|| < 1$, on a $||a^{n+1}|| \leqslant ||a||^{n+1}$ qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$. En passant à la limite et en utilisant la continuité du produit, on a donc que $(1-a)S = 1$. Un calcul totalement analogue donne $S(1-a) = 1$. Donc $1-a$ est bien inversible, d'inverse S. □

On a alors immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 7.12. *Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace de Banach. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $|||f||| < 1$. Alors $Id - f$ est inversible et $(Id-f)^{-1} \in \mathcal{L}_c(E)$. De plus,*

$$|||(1-f)^{-1}||| \leqslant \frac{1}{1-|||f|||}.$$

Donnons un nom à l'espace des applications inversibles d'inverse continu.

Définition 7.7. Soit $(E, \cdot)$ un evn . On appelle

$$GL_c(E) := \{f \in \mathcal{L}_c(E),\ f \text{ inversible et } f^{-1} \text{ est continu}\}.$$

On a alors la proposition suivante.

Proposition 7.13. *$GL_c(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$.*

Démonstration. Soit $f \in GL_c(E)$. On cherche $r > 0$ tel que $B(f,r) \subset GL_c(E)$ (boule pour la norme triple). Soit $g \in \mathcal{L}_c(E)$. On écrit

$$f - g = f(Id - f^{-1}g).$$

On sait que f est inversible. De plus, $Id - f^{-1}g$ est inversible dès que $|||f^{-1}g||| < 1$. Comme $|||f^{-1}g||| \leqslant |||f^{-1}|||\,|||g|||$, dès que $|||f^{-1}|||\,|||g||| < 1$, on a bien que $Id - f^{-1}g$ est inversible, et donc $f - g$ est inversible. On pose donc $r = \frac{1}{|||f^{-1}|||}$. Alors, si $h \in B(f,r)$, alors $h = f - g$ avec $|||g||| < r$, et les calculs précédents assurent bien que $h = f - g$ est inversible.

□

Donnons un autre exemple de série classique dans une algèbre de Banach.

Proposition 7.14. *Soit $(\mathcal{A}, ||\cdot||)$ une algèbre de Banach. Soit $a \in A$. Alors*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$$

est convergente dans A. La somme de cette série est appelée l'exponentielle de a, et est noté $\exp(a)$ *ou e^a. Enfin,*

$$||e^a|| \leqslant e^{||a||}.$$

Démonstration. Elle est assez similaire au cas de l'inverse. La série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$ est normalement convergente. En effet, par inégalité triangulaire et propriété d'une norme d'algèbre, $\left|\left|\frac{a^k}{k!}\right|\right| \leqslant \frac{||a||^k}{k!}$, qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, la série $\sum \frac{a^k}{k!}$ converge dans $\mathcal{L}_c(E,F)$. On appelle $\exp(a)$ la somme de cette série et S_n sa somme partielle.

Par inégalité triangulaire,

$$||S_n|| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{||a||^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{||a||^k}{k!} = e^{||a||}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $||S|| \leqslant e^{||a||}$.

□

Corollaire 7.15. *Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace de Banach. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$Alors*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^k}{k!}$$

est convergente dans $\mathcal{L}_c(E)$. La somme de cette série est appelée l'exponentielle de f, et est noté $\exp(f)$ *ou e^f. Enfin,*

$$|||e^f||| \leqslant e^{||f||}.$$

Donnons quelques propriétés supplémentaires de l'exponentielle.

Proposition 7.16. *Soit* $(\mathcal{A}, ||\cdot||)$ *une algèbre de Banach. Soit* $a, b \in A$ *qui commutent, au sens où* $ab = ba$*. Alors*
$$e^{a+b} = e^a e^b.$$

Démonstration. Il faut faire un raisonnement du type "produit de Cauchy". On pose
$$\Delta_n = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{b^j}{j!}\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(a+b)^k}{k!}.$$

On utilise la formule du binôme de Newton pour les éléments d'un anneau qui commutent, pour obtenir
$$\frac{(a+b)^k}{k!} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{1}{k!} a^i b^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!(k-i)!} a^i b^{k-i} = \sum_{i+j=k} \frac{a^i}{i!} \frac{b^j}{j!}.$$

On a donc que
$$\Delta_n = \left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{a^i}{i!}\frac{b^j}{j!}\right) - \sum_{i+j\leqslant n} \frac{a^i}{i!}\frac{b^j}{j!} = \sum_{i,j\in I} \frac{a^i}{i!}\frac{b^j}{j!},$$

où
$$I = (i,j),\ i,j \in [|0,n|] \text{ et } n+1 \leqslant i+j \leqslant 2n.$$

L'inégalité triangulaire et la propriété de la norme d'algèbre donne donc que
$$||\Delta_n|| \leqslant \sum_{i,j\in I} \frac{||a||^i}{i!}\frac{||b||^j}{j!} = \left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{||a||^i}{i!}\frac{||b||^j}{j!}\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(||a||+||b||)^k}{k!}.$$

Quand $n \to +\infty$, par propriété de l'exponentielle réelle, le membre de droite tend vers $e^{||a||}e^{||b||} - e^{||a||+||b||} = 0$. On a donc bien que $\Delta_n \to 0$ et donc le résultat voulu. $\square$

Remarque 7.5. Attention, cette formule est complètement fausse si a et b ne commutent pas. On verra un exemple en exercice.

Corollaire 7.17. *Soit* $(\mathcal{A}, ||\cdot||)$ *une algèbre de Banach. Soit* $a \in A$*. Alors* e^a *est inversible et* $(e^a)^{-1} = e^{-a}$*.*

Démonstration. a et $-a$ commutent donc $e^a e^{-a} = e^{a-a} = e^0 = 1$. De même $e^{-a}e^a = 1$, d'où le résultat voulu. $\square$

Donnons enfin une propriété très utile pour l'étude des exponentielles de matrices.

Proposition 7.18. *Soit* $(\mathcal{A}, ||\cdot||)$ *une algèbre de Banach. Soit* $a \in A$*. soit* $u \in A$ *inversible. Alors*
$$e^{u^{-1}au} = u^{-1}e^a u.$$

Démonstration. Elle est très simple : il suffit de remarquer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a, par récurrence immédiate, $(u^{-1}au)^k = u^{-1}a^k u$. Donc, en utilisant encore une fois la continuité du produit,

$$e^{u^{-1}au} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(u^{-1}au)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(u^{-1}\frac{a^k}{k!}u \right) = u^{-1} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right) u = u^{-1}e^a u.$$

$\square$

Remarque 7.6. Comme précédemment, tous ces résultats peuvent s'interpréter facilement dans l'algèbre de Banach $\mathcal{L}_c(E)$ avec E un Banach.

7.2.4 Application aux espaces de matrices

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une matrice de $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ n'est rien d'autre que la représentation dans les base canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}_c(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$, appelé endomorphisme canoniquement associé à A par la formule $f(x) = Ax$. Tout ce qu'on a vu sur les normes triples et sur l'algèbre $\mathcal{L}_c(E)$ peut donc se généraliser aux espaces de matrices, pour lequel on munit $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ de normes. Donnons quelques compléments ici.

Proposition 7.19. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \sigma(A)$. Alors, quelle que soit la norme subordonnée $|||\cdot|||$ que l'on choisit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $|\lambda| \leqslant |||A|||$.*

Démonstration. C'est évident : on choisit un vecteur propre x de norme A associé à la valeur propre. Alors $|f(x)| = \lambda \leqslant= \mathfrak{N}_2(f) = |||f|||$. $\square$

Donnons des propriétés topologiques des matrices inversibles.

Proposition 7.20. *$GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Démonstration. Comme on travaille en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. On peut donc choisir sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une norme subordonées à deux normes ; pour de telles normes, on a bien que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert par une proposition précédente.

Pour montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense, on peut raisonner de la manière suivante. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si M est inversible, il n'y a rien à montrer. Si M n'est pas inversible, alors 0 est valeur propre de M. On considère l'ensembles valeurs propres distinctes (sans les répéter par multiplicité) $\lambda_1 = 0, \dots \lambda_p$ de M. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors les valeurs propres de $M + \frac{I_n}{k}$ sont exactement $\frac{1}{k}, \dots \lambda_p + \frac{1}{k}$. Or, les λ_i étant non nuls pour $i \geqslant 2$, pour $k \geqslant K$, les $\lambda_i + \frac{1}{k}$ sont aussi non nuls. Donc pour $k \geqslant K$, les valeurs propres de $M_k M + \frac{I_n}{k}$ sont nécessairement non nulles, autrement dit M_k est inversible. Or il est clair que $M_k \to M$ pour n'importe quelle norme, d'où le résultat de densité voulu. $\square$

Donnons pour finir une formule pour le déterminant de l'exponentielle.

Proposition 7.21. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $det(e^A) = e^{trace(A)}$.*

Démonstration. Comme $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$, on peut toujours voir A comme à coefficients complexes. On peut alors la trigonaliser dans $\mathbb{C}$: $A = P^{-1}TP$ avec T triangulaire supérieure. Les valeurs propres sont alors les éléments de la diagonale $T_{i,i} = \lambda_i$ où λ_i sont toutes les valeurs propres complexes répétées avec multiplicité géométrique. On rappelle que $\mathrm{trace}(T) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. On sait que la puissance d'une matrice triangulaire supérieure reste triangulaire supérieure, et que les coefficients diagonaux sont les puissances des coefficients diagonaux. Un argument de linéarité et passage à la limite assure que les coefficients diagonaux de e^T sont les e^{λ_i}. Or par une formule déjà vue, $e^A = P^{-1}e^TP$, donc

$$\det(e^A) = \det(e^T) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = e^{\mathrm{trace(T)}}.$$

La trace étant un invariant de similitude, on a $\mathrm{trace}(T) = \mathrm{trace}(A)$, d'où le résultat voulu.

□

7.3 Exercices

Exercice 7.1. Montrer que si $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est linéaire et tel que $f(x) = Mx$ pour $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$|\!|\!| f |\!|\!| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |m_{ij}|. \tag{7.36}$$

Exercice 7.2. Montrer que si $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ est linéaire et tel que $f(x) = Mx$ pour $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$|\!|\!| f |\!|\!| = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^n |m_{ij}|. \tag{7.37}$$

Exercice 7.3. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$ au sens de l'Exemple 7.4. Soit $f : P \in E \mapsto XP \in E$. Montrer que $f \in \mathcal{L}_c(E)$ et calculer $|||f|||$.

Exercice 7.4. Dans $E = l^\infty(\mathbb{C})$ muni de $||\cdot||_\infty$, on considère l'endomorphisme

$$f : u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \mapsto (u_{n_1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

Montrer que $f \in \mathcal{L}_c(E)$ et calculer $|||f|||$.

Exercice 7.5. Considérons $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et l'application $\Phi : (E, , \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_1)$ définie par

$$\Phi[f](x) = \int_0^x f(t)\,dt, \qquad \forall x \in [0,1]. \tag{7.38}$$

Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}_c(E)$ et calculer $|\!|\!|\Phi|\!|\!|$. $|\!|\!|\Phi|\!|\!|$ est-elle atteinte ?

Exercice 7.6. Dans $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, on pose $u(f) : f \in E \mapsto (x \mapsto \int_0^x tf(t)dt)$.

1. Montrer que u est bien définie de $(E, ||\cdot||_\infty)$ vers $(E, ||\cdot||_1)$, puis qu'elle est linéaire continue et calculer sa norme triple.
2. Montrer que u est bien définie de $(E, ||\cdot||_1)$ vers $(E, ||\cdot||_\infty)$, puis qu'elle est linéaire continue et calculer sa norme triple.

Exercice 7.7. Considérons l'espace vectoriel $C^\infty([0,1])$ des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tels que $\frac{d^n}{dx^n} f \in C([0,1])$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout norme $\mathfrak{n}$, l'application linéaire $D : (C^\infty([0,1]), \mathfrak{n}) \to (C^\infty([0,1]), \mathfrak{n})$ définie par $Df = f'$ n'est pas continue.

Exercice 7.8. Soit $||\cdot||$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on ait

$$||AB|| \leqslant C||A||\,||B||.$$

Exercice 7.9. Existe-t-il une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on ait $||AB|| = ||A||\,||B||$?

Exercice 7.10. On munit $l^\infty := l^\infty(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$ de $||\cdot||_\infty$ et$l^1 := l^1(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$ de $||\cdot||_1$. Soit $k = (k_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l^\infty$. On pose

$$\varphi_k : u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_1 \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} k_n u_n.$$

1. Montrer que φ_k est bien définie et que $\varphi_k \in (l^1)'$. Calculer $|||\varphi_k|||$.
2. Montrer que $\varphi : k \in l^\infty \mapsto \varphi_k \in (l^1)'$ esdt une isométrie bijective.

Bibliographie

[1] K. Aguilar. *A course in metric spaces assuming basic analysis.* https://math.la.asu.edu/~kaguilar/MAT472/metric_spaces_k_aguilar_c.pdf

[2] K. Conrad *Spaces that are connected but not path-connected* https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/topology/connnotpathconn.pdf

[3] A. Kolmogorov et S. Fomine *Eléments de la théorie de fonctions et de l'analyse fonctionelle* Éditions MIR-Moscou, 1973.

[4] Y. Privat. *Espaces Vectoriels Normés et Topologie.* https://w3.ens-rennes.fr/math/people/yannick.privat/documents/polyCPP.pdf