Université Pierre et Marie Curie 2011-2012

Théorie de Fourier

Contrôle du 10 avril 2012 ; Durée : 2h

Toutes les affirmations et tous les calculs doivent être soigneusement justifiés.

Exercice 1

On note $Ш = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{k2\pi}$. Soit $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{si } |\sin x| \leqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \sin x \geqslant \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } \sin x \leqslant -\frac{1}{2}. \end{cases}$

1. Tracer le graphe de f.

2. Expliquer succintement (mais rigoureusement) pourquoi f définit une distribution périodique.

3. Montrer qu'il existe deux fonctions constantes par morceaux G et V (que l'on explicitera) de support borné telles que $f = (\sin \cdot V + G) \star Ш$.

4. Calculer la dérivée DG au sens des distributions et en déduire les coefficients de Fourier de $DG \star Ш$, puis ceux de $G \star Ш$.

5. Justifier soigneusement le calcul suivant :

$$\begin{aligned} D^2 f + f &= \Big(G + \cos \cdot DV\Big) \star Ш\,, \\ &= \Big(G + \cos \cdot (\delta_{-\frac{\pi}{6}} - \delta_{\frac{\pi}{6}} + \delta_{\frac{5\pi}{6}} - \delta_{\frac{7\pi}{6}})\Big) \star Ш\,, \\ &= \Big(G + \tfrac{\sqrt{3}}{2} (\delta_{-\frac{\pi}{6}} - \delta_{\frac{\pi}{6}} - \delta_{\frac{5\pi}{6}} + \delta_{\frac{7\pi}{6}})\Big) \star Ш\,. \end{aligned}$$

6. Calculer les coefficients de Fourier $c_n(D^2 f + f)$ et en déduire $c_n(f)$, pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$.

7. Calculer $c_0(V \star Ш)$ et $c_2(V \star Ш)$. En déduire par la règle de modulation la valeur de $c_1(\sin \cdot V \star Ш)$, puis celle de $c_1(f)$. Avec le moins de calculs possible (mais rigoureusement), déterminer $c_{-1}(f)$.

Exercice 2

On rappelle que l'on définit un produit scalaire (hermitien) sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ en posant

$$\forall (f, g) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})^2, \quad (f \mid g) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

En particulier, on a $\|f\|_2 = \sqrt{(f \mid f)}$ et $\widehat{f}(u) = (f \mid e_u)$, avec $e_u(x) = \exp(2\pi i u x)$.

1. Pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(x) = e^{-2\pi i u_0 x} f(x + x_0)$. En appliquant les règles de symétrie de la transformation de Fourier, calculer $\widehat{g}$ en fonction de $\widehat{f}$.

2. Montrer que $\|xg\|_2 = \|(x - x_0)f\|_2$ et $\|u\widehat{g}\|_2 = \|(u - u_0)\widehat{f}\|_2$.

3. Pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on pose $Pf = if'$ et $Qf = xf$. Montrer que pour tout $(f, h) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})^2$, on a

$$(Pf \mid h) = (f \mid Ph) \text{ et } (Qf \mid h) = (f \mid Qh).$$

4. Vérifier que $i(QP - PQ)f = f$. En déduire que

$$\|f\|_2^2 = \|g\|_2^2 = (i(QP - PQ)g \mid g) = 2\,\mathfrak{Im}(Qg \mid Pg) \leqslant 2\|Qg\|_2 \|Pg\|_2 = 4\pi \|(x - x_0)f\|_2 \|(u - u_0)\widehat{f}\|_2.$$