Université Pierre et Marie Curie 2012-2013
EPU-III

Analyse de Fourier sur le groupe $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

Pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{\overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{N}\}$ le groupe formé des classes
$$\overline{n} = \{n + kN \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$$
muni de l'opération d'addition : $\overline{n} + \overline{m} = \overline{n+m}$.

Une réalisation concrète de ce groupe est donnée, par exemple, par le cadran d'une montre (avec $N = 12$ pour les horlogers ou $N = 2$ pour les informaticiens) : la petite aiguille de la montre peut avancer ou reculer arbitrairement mais seul compte le mouvement modulo un nombre entier de tour de cadran).
On note $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel formé des fonctions $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ muni du produit scalaire
$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{N} \sum_{p \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \overline{f(p)} g(p).$$
Pour tout $k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, on note $e_k \in \mathscr{F}$ la fonction définie par
$$\forall p \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \quad e_k(p) = \exp\left(\frac{2\pi i k p}{N}\right).$$
Les fonctions e_k sont exactement les solutions de l'équation fonctionnelle d'inconnue $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ définie par
$$\forall p \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \quad f(p+q) = f(p)f(q).$$
La famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $\mathscr{F}$. La décomposition d'une fonction $f \in \mathscr{F}$ suivant cette base définit les coefficients de Fourier de f :
$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\ e_k, \quad \text{avec } \widehat{f}(k) = \langle e_k, f\rangle = \frac{1}{N} \sum_{p \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(p) e_k(-p).$$
L'opération (linéaire) qui à f associe $\widehat{f}$ est appelée *analyse de Fourier* de f ; l'opération réciproque, qui à $\widehat{f}$ associe f, est appelée *synthèse de Fourier* de f. Ces deux opérations sont bijectives, réciproques l'une de l'autre. On peut donc présenter et étudier un signal périodique à temps discret aussi bien par la fonction f que par la fonction $\widehat{f}$.

En référence à l'image de la montre, il est commode de considérer que f est définie pour une variable p *temporelle*, alors que $\widehat{f}$ est définie pour une variable k *fréquentielle* : on peut en effet considérer que la fonction e_k décrit le mouvement d'une aiguille sur le cercle unité de $\mathbb{C}$ de centre 0 à la fréquence k/N.

On rappelle les principales propriétés de cette transformation.

Symétries : pour tout $f \in \mathscr{F}$ et $p \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, on pose $\tau_p f(q) = f(q-p)$ et $f^-(q) = f(-q)$.
Linéarité : $(\widehat{\lambda f + \mu g}) = \lambda \widehat{f} + \mu \widehat{g}$;
Translation : $\widehat{\tau_p f} = e_{-p} \cdot \widehat{f}$;
Déphasage : $\widehat{e_p f} = \tau_p \widehat{f}$;
Bijectivité : $\widehat{\widehat{f}} = \frac{1}{N} f^-$.

Produit de convolution : Le produit de convolution de f et g dans $\mathscr{F}$ est l'unique fonction $f\star g$ dont les coefficients de Fourier sont les produits de ceux de f et de g. On retiendra les formules suivantes.

$$f\star g = \sum_{k\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)e_k \quad ; \quad (f\star g)(p) = \frac{1}{N}\sum_{q\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(q)g(p-q).$$

$$\widehat{f\star g} = \widehat{f}\cdot\widehat{g} \quad ; \quad \widehat{fg} = N\ \widehat{f}\star\widehat{g}.$$

Le produit usuel de deux fonctions étant associatif, le produit de convolution l'est aussi.

Formule de Parseval : la norme au carré d'un vecteur est la somme des carrés (des modules) de ses coordonnées dans une base orthonormée, soit encore

$$\frac{1}{N}\sum_{p\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} |f(p)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Pour $p\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, on pose $\delta_q(p) = \begin{cases} N & \text{si } q=p, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

Exercice 1

1. Calculer $\widehat{\delta_0}$, puis $\widehat{\delta_p} = \widehat{\tau_p\delta_0}$ à l'aide de l'axiome de translation.

2. En utilisant la linéarité de la transformation $f\mapsto\widehat{f}$ et la formule $f = \frac{1}{N}\sum_{p\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(p)\delta_p$, décomposer $\widehat{f}$ en somme de fonctions exponentielles et retrouver l'axiome de bijectivité.

3. Calculer $\widehat{e_p}$ pour tout $p\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ (on pourra commencer par $p=0$ puis utiliser l'axiome de déphasage).

Exercice 2

Dans cet exercice, on suppose que $N=2m$ est pair. Pour $0\leqslant p\leqslant 2m-1$, on pose

$$f_N(\overline{p}) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0\leqslant p\leqslant m-1, \\ 0, & \text{si } m\leqslant p\leqslant 2m-1.\end{cases}$$

1. Calculer $\widehat{f_N}$.

2. Pour $k\in\mathbb{Z}$ fixé, calculer la limite de $\widehat{f_{2m}}(\overline{k})$ lorsque m tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Soit $f\in\mathscr{F}$.

1. Montrer que $\langle\delta_q, f\rangle = f(q)$. En déduire que la famille $(\delta_p)_{p\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ est orthogonale.

2. Montrer que $\delta_p\star f = f\star\delta_p = \tau_p f$. En déduire que $\delta_p\star\delta_q = \delta_{p+q}$.

3. Montrer que $f = \frac{1}{N}\sum_{p\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(p)\delta_p$ et retrouver que $f\star g = \frac{1}{N}\sum_{p\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(p)\tau_p g$.

4. Montrer que $\tau_p(f\star g) = (\tau_p f)\star g = f\star(\tau_p g)$.