EXERCICES – Analyse de Fourier

1. Calculer les coefficients des séries de Fourier des fonctions suivantes, périodiques de période 2π:
   a) $f(x) = x$ pour tout $0 \leq x < 2\pi$
   b) $g(x) = |\sin x|$
   c) $h(x) = |\sin x|^3$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$, prolongée par imparité et 2π- périodicité.
   (a) Représenter le graphe de f et déterminer son développement en série de Fourier.
   (b) En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^6}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6}$.

3. Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, on considère les coefficients de Fourier de f
$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, \mathrm{d}x, \qquad \forall k \in \mathbb{Z},$$
   et on note $S_n f$ la somme partielle de rang $n \in \mathbb{N}$ de la série de Fourier de f associée.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varrho_n := \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. En utilisant la décroissance de la fonction $\phi : x \mapsto 1/x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que $\varrho_n \leq 1/n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Dans cette question, on suppose que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
      i. À l'aide d'intégrations par partie, établir une relation entre $c_k(f)$ et $c_k(f'')$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$.
      ii. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|$ est convergente.
      iii. Établir une majoration de $\|f - S_n f\| := \displaystyle\sup_{x \in [-\pi,\pi]} |f(x) - S_n f(x)|$ en fonction de ϱ_n et de f''.
      iv. En déduire que la suite $(n\,\|f - S_n f\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
   (c) Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $[-\pi, \pi]$ par $g(x) = x^2$ et étendue sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.
      i. Calculer $c_k(g)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
      ii. Montrer que $(S_n g)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.
      iii. En calculant $g(\pi)$ de deux façons différentes, déterminer la valeur de ϱ_0.
      iv. Peut-on faire le même raisonnement qu'en 2.(d) pour montrer que $(n\,\|g - S_n g\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée?

4. Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer si elle est dans L^1, dans L^2.
$$\frac{\sin x}{|x|^{3/2}}; \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \frac{1}{x^2-1}; \quad \frac{1-\cos x}{x^2}$$

5. On rappelle que pour $n \in \mathbf{N}$, on a
$$\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]}(x))(u) = 2\frac{\sin u}{u}, \quad \mathcal{F}((1-|x|)\chi_{[-1,1]}(x))(u) = \left(\frac{\sin(u/2)}{u/2}\right)^2,$$
$$\mathcal{F}(e^{-|x|})(u) = \frac{2}{1+u^2}, \quad \mathcal{F}(e^{-x^2})(u) = \sqrt{\pi} e^{-u^2/4}, \quad \mathcal{F}(x^n e^{-x} \chi_{[0,+\infty[}(x))(u) = \frac{n!}{(1+iu)^{n+1}}.$$
   Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes ($n \in \mathbf{N}$):
$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2, \frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{(1+ix)^{n+1}}, \frac{\sin x}{x}.$$

6. Montrer que les fonctions suivantes

$$e^{-2|x|}, \quad e^{-\pi x^2}, \quad e^{-x^2}\sin x, \quad \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-|x|}, \quad \frac{\sin x}{x(1+ix)},$$

sont de classe $L^1(\mathbb{R})$ et calculer leurs transformées de Fourier.

7. On note H la fonction de Heaviside definie par $H(t) = 1$ pour $t \geq 0$ et $H(t) = 0$ pour $t < 0$. Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes

$$H(2-|x|); \quad H(x)e^{-x/2}; \quad H(x-3)e^{-3x}\cos x; \qquad H(1-|x|)(1-2|x|); \qquad H(x)\ \tfrac{\sin x}{x}e^{-x}.$$

8. Le but de cet exercice est de calculer la transformée de Fourier de $S = sinc(\pi u)$.
   (a) En décomposant $g(x) = \sin(\pi x)$ en somme d'exponentielles et en appliquant la règle de déphasage, calculer $\mathcal{F}(g)$.
   (b) En appliquant la règle de dérivation, exprimer $D\mathcal{F}(S)$ en fonction de $\mathcal{F}(g)$, sans calculer $\mathcal{F}(S)$.
   (c) Montrer qu'il existe une unique fonction $h \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$D(h) = \delta_{-1/2} - \delta_{1/2},$$

au sens des distributions. Conclure.