EXERCICES

1. (a) Montrer que la fonction

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{1}{x^2-1}\right\} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} := \exp\left\{\dfrac{1}{x^2-1}\right\} \chi_{|x|<1}(x)$$

appartient à $\mathcal{D}(\mathbf{R}) := C_0^\infty(\mathbf{R})$. Déterminer son support.
Indication: Montrer d'abord que la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, définie par $f(t) = e^{-1/t}\chi_{]0,+\infty[}(t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, puis écrire ρ comme une fonction composée: $\rho(x) = f(1-x^2)$.

(b) On pose $\rho_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}\rho(x/\varepsilon)$. Montrer que $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, déterminer son support et montrer que

$$\int_{\mathbf{R}} \rho_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}} \rho(x)\,dx.$$

(c) Soit $a \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que

$$\begin{cases} \text{support}(\varphi) = [\mathrm{a} - \varepsilon, \mathrm{a} + \varepsilon], \\ \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\,dx = 1, \\ \varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

2. Soit $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ non identiquement nulles. Pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}$, on définit les fonctions

$$f_\varepsilon(x) = \varphi(x+\varepsilon), \quad g_\varepsilon(x) = \varphi((1+\varepsilon)x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R},$$

$$h_\varepsilon = \varphi + \varepsilon\psi$$

(a) Montrer que $f_\varepsilon, g_\varepsilon$ et h_ε appartiennent à $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ et calculer leur support.

(b) Montrer que $f_\varepsilon \to \varphi$, $g_\varepsilon \to \varphi$ et $h_\varepsilon \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

(c) Montrer que f_ε, g_ε, h_ε et $\dfrac{1}{\varepsilon}g_\varepsilon$ ne convergent pas dans $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ lorsque $\varepsilon \to \infty$.

3. (a) Montrer que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{-1/2} & \text{si } x \neq 0, \\ 7 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est une distribution sur $\mathbf{R}$ dans ce sens, que l'application

$$[f] : \mathcal{D}(\mathbf{R}) \mapsto \mathbf{R},$$

définie par

$$< [f], \varphi >= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{|x|^{1/2}}\varphi(x)\,dx,$$

est une distribution sur $\mathbf{R}$.

(b) Montrer que les applications $[g]$ et $[h]$, où $g(x) = \sin(1/x)\chi_{]0,+\infty[}$ et $h(x) = \cos(1/x)\chi_{]0,+\infty[}$, sont des distributions sur $\mathbf{R}$.

(c) Montrer que la fonction $f(x) = e^{1/x^2}\chi_{]0,+\infty[}(x)$ n'est pas une distribution sur $\mathbf{R}$ dans le sens suivant: il n'existe pas de distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telle que

$$T(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \ \text{ avec } \sup \varphi \subset]0,+\infty[.$$

Indication: On pourra définir la suite de fonctions test

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{e^n}\varphi(nx), \quad n \in \mathbf{N},$$

où $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $0 \le \varphi \le 1$ sur $\mathbf{R}$, $\varphi \equiv 1$ sur $[5/4, 7/4]$ et $\varphi \equiv 0$ sur $\mathbf{R} \setminus [1,2]$ (montrer au préalable qu'un tel φ existe). On montre ensuite que $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ mais que $T(\varphi_n) \to +\infty$ lorque $n \to +\infty$.

4. Montrer que les applications suivantes sont des distributions de $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$:

   a) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \mapsto \varphi(1) \in \mathbf{R}$

   b) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \mapsto \varphi'(0) \in \mathbf{R}$

   c) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \mapsto \varphi'(0) - \varphi(1) \in \mathbf{R}$

5. Montrer que les applications suivantes sont des distributions de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$:

   a) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2) \mapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} |x|^{-1}\varphi(x)dx$

   b) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi(t,1)dt$

   c) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi(t,t)dt$

   d) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1,0)dx_1$

6. Calculer le support de la distribution $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, $x_0 \in \mathbf{R}$, ainsi que celui de la distribution $[\chi_{]0,1[}]$ (fonction indicatrice de l'intervalle $]-1,1[$).

   Rappel: Le support d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert $\omega \subset \Omega$ tel que $< T, \varphi >= 0$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dont support$\varphi \subset \omega$.

7. Calculer les limites dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$:

   a) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0} [\rho_\varepsilon]$, où ρ_ε est la fonction définie dans le premier exercice.

   b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{2}\chi_{]\frac{-1}{n},\frac{1}{n}[}\right]$,

   c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[n\chi_{]0,\frac{1}{n}[} - n\chi_{]-\frac{1}{n},0[}\right]$.