EXERCICES

1. On considère la fonction
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ x^2 & \text{si } x \in [-1, 0], \\ 0 & \text{si } x \in]0, 1[, \\ 1 - x & \text{si } x \in [1, +\infty[. \end{cases}$$
Tracer le graphe représentatif de cette fonction, puis préciser l'ensemble des points de $\mathbf{R}$ où elle est dérivable au sens usuel. Déterminer la dérivée de f au sens des distributions (c'est-à-dire, $[f]'$). Déterminer ensuite la dérivée seconde de f au sens des distributions.

2. Déterminer les dérivées au sens des distributions des fonctions suivantes.
   (a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$
   (b) $g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$, $f(x) = |\tan x|$
   (c) $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = e^x \chi_{]0,10[} + (\ln |x|)\chi_{\{x \in \mathbf{R};\ |x| > e\}}$

3. Montrer que l'application v.p.(1/x) : $\mathcal{D}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, définie par
$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \mapsto \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x}(\varphi(x) - \varphi(0))\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx$$
est une distribution sur $\mathbf{R}$ (montrer au préalable que l'égalité ci-dessus a en effet lieu).
Montrer que la fonction $f(x) = \ln |x|$ peut être identifiée à une distribution sur $\mathbf{R}$. Calculer sa dérivée au sens des distributions.

4. (a) Pour quelles valeurs du paramètre α, l'application
$$[x_+^\alpha] : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \mapsto \int_0^{+\infty} x^\alpha \varphi(x)\, dx$$
est bien définie? Dans ce cas, montrer que cette application est une distribution sur $\mathbf{R}$, puis calculer sa dérivée au sens des distributions.
   (b) Soit maintenant $\alpha = -\frac{3}{2} \in]-2, -1[$. Montrer que l'application
$$[x_+^\alpha] : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \mapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} x^\alpha (\varphi(x) - \varphi(0))\, dx$$
est une distribution sur $\mathbf{R}$.

5. (a) Soit $\Omega := \{(x, y) : y < 0\}$ et $f \in C^1(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$. Soit χ_Ω la fonction indicatrice de Ω. Calculer les dérivées partielles au sens des distributions de la fonction $f\chi_\Omega : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Calculer $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}(f\chi_\Omega)$ lorsque f est définie par $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.
   (b) Calculer les dérivées partielles au sens des distributions de la fonction $(f\chi_K)$, où $K := B(0, 1) \subset \mathbf{R}^2$.

6. Calculer les dérivées partielles au sens des distributions de la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, définie par
$$f(x, y) = \begin{cases} ye^x & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \text{ et } y > 0 \\ xy^2 + 1 & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ 1 - xy & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 0 \\ 13 & \text{sinon.} \end{cases}$$

7. (a) Montrer que pour toute distribution $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ on a : $\delta_0 * \phi = \phi$.
   (b) Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ l'équation
$$-T'' + T = \delta_0.$$
   (On pourra calculer la dérivée seconde au sens des distributions de la fontion $x \mapsto e^{-|x|}$).
   (c) En déduire, pour $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, une expression sous forme intégrale de la solution de l'équation
$$-T'' + T = \rho.$$

8. On rappelle que la solution générale d'une équation différentielle linéaire non homogène est la somme entre une solution particulière de cette équation non homogène est une solution de équation différentielle homogène associée.

   Résoudre les équations suivantes:

   a) $T' + aT = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, où le coefficient a est défini par $a(x) = x^3 - x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

   b) $T'' - 3T' + 2T = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. On pourra chercher une solution particulière de cette équation sous la forme $T_p := [f]$, où $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction continue de la forme
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ C_1 e^{2x} + C_2 e^x & \text{si } x > 0, \end{cases}$$
   où C_1, C_2 sont des constantes à déterminer.

   c) $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \delta_{(0,0)}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$. On montrera que la solution générale de cette equation est de la forme $T = [f] + S$, où
$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) \text{ pour tout } (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus (0,0),$$
   et S satisfait $\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0$.