TD 1: Probabilités discrètes: évenements, indépendance, probabilité conditionelle.

Exercice 1. Le chevalier de Méré est un noble et écrivain français très amateur de jeu d'argent. Contemporain de Blaise Pascal, il s'opposa à ce dernier sur un problème de jeu de dés:

Sur un lancer de 4 dés, il gagne si au moins un "6" apparaît.

1. Méré remarque expérimentalement que le jeu lui est favorable. Prouvez-le.

   Malheureusement pour notre chevalier, celui-ci trouva de moins en moins de candidat, il proposa la variante suivante:

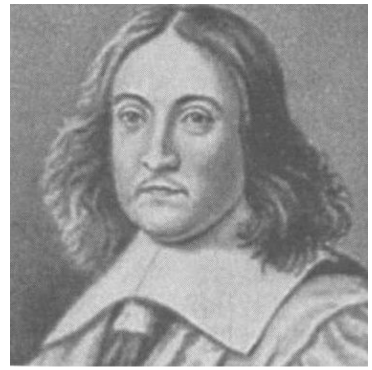
   On lance 24 *fois une paire de dés et il gagne si un double* 6 *apparaît.*

   En effet pour le chevalier, la probabilité d'obtenir un " double 6" est de $1/36$ soit 6 fois moins de chance que d'obtenir un simple "6". Donc en jouant six fois plus longtemps, c'est à dire en lançant donc $6 \times 4 = 24$ paires de dés, on doit obtenir un jeu tout aussi favorable que le premier. Pascal et Fermat, dans leurs correspondance sur les probabilités, montrèrent que le raisonnement du Chevalier était faux.

2. Pouvez-vous montrer que le second jeu est défavorable?

Extrait de la lettre du 29 juillet 1654 de Pascal à Fermat, mentionnant le problème du chevalier de Méré:

Je n'ai pas eu le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Méré, car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre (c'est, comme vous savez, un grand défaut) et même il ne comprend pas qu'une ligne mathématique soit divisible à l'infini et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini, et je n'ai jamais pu l'en tirer. Si vous pouviez le faire, on le rendrait parfait.



Il me disait donc qu'il avait trouvé fausseté dans les nombres par cette raison : Si on entreprend de faire un six avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625. Si on entreprend de faire Sonnez avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24. Et néanmoins 24 est à 36 (qui est le nombre des faces de deux dés) comme 4 à 6 (qui est le nombre des faces d'un dé).

Voilà quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait : mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes.

Exercice 2. On considère une pièce que l'on jette 4 fois de suite et on note (dans l'ordre) les résultats obtenus.

1. Quel univers des possibles Ω peut-on choisir? Quel ensemble des événements E peut-on choisir? Quelle loi de probabilité P peut-on choisir?
2. On considère l'événement $A = \{\text{il y a plus de piles que de face}\}$ et l'événement $B = \{\text{le premier lancer est pile}\}$. Calculer la probabilité de A et celle de B.
3. A et B sont-ils indépendants?

Exercice 3. On considère un jeu de loterie qui consiste à effectuer un tirage sans remise de 5 boules parmi 50 boules numérotées de 1 à 50 puis un tirage sans remise de 2 étoiles parmi 11 étoiles numérotées de 1 à 11. Chaque personne mise 2 euros et choisit 5 numéros de boules et 2 numéros d'étoile. Après chaque tirage (où l'ordre dans lequel sont tirées les boules et les étoiles n'est pas pris en compte), une personne gagne une certaine somme en fonction du nombre de boules et d'étoiles tirées qui sont celles qu'il avait préalablement choisi.

1. Quel univers des possibles Ω peut-on choisir? Quel ensemble des événements E peut-on choisir? Quelle loi de probabilité P peut-on raisonnablement choisir?

2. Quelle est la probabilité de tirer le gros lot (ie. d'obtenir les 5 bonnes boules et les 2 bonnes étoiles)?

3. On suppose que l'on gagne à partir du moment où l'on a au moins 2 bons numéros de boules, ou alors un bon numéro de boules et deux bonnes étoiles. Quelle est la probabilité de gagner quelque chose? Exprimer ceci sous la forme "on a environ une chance sur ... de gagner".

4. Est-il plus probable d'avoir deux boules et pas d'étoiles ou alors d'avoir un boule et deux étoiles? Même question si l'on compare deux boules et une étoile avec une boule et deux étoiles. Est-ce intuitivement cohérent?

Exercice 4. On considère n urnes numérotées de 1 à n. L'urne numéro k contient k boules vertes et $n-k$ boules rouges. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte ? Quelle est la limite de cette probabilité quand $n \to \infty$?

Exercice 5. Une maladie affecte statistiquement une personne sur 1000. Un test de dépistage permet de détecter la maladie avec une fiabilité de 99%, mais il y a 0.2% de chances que le test donne un faux positif (ie. une personne est déclarée malade sans l'être).

1. Une personne est testée positivement. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade?

2. Une personne est testée négativement. Quelle est la probabilité qu'elle soit quand même malade?

3. Ce dépistage remplit-il son rôle?

Exercice 6. Paradoxe des anniversaires

1. Considérons n personnes, quelle est la probabilité notée $p(n)$ d'avoir au moins deux personnes nés le même jour de l'année? Quelques valeurs numériques:

n	$p(n)$
5	2,71%
10	11,69%
15	25,29%
20	41,14%
30	56,87%
50	97,04%
100	99,99997%
$\geqslant$365	100%

[1]

2. En utilisant un DL à l'ordre 1 de l'exponentielle, montrer que si n est "suffisamment petit" on dispose de l'approximation suivante:

$$p(n) \approx 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{2\cdot 365}}$$

3. En déduire le nombre de personnes nécessaires pour avoir une chance sur deux que deux personnes aient leur anniversaire le même jour.

[1] Pour simplifier, toutes les années sont non-bissextiles.