TD 2: variables aléatoires et lois classiques

Exercice 1. Alice et Bob jouent avec une paire de dés. Ils conviennent que Alice gagne si et seulement si elle effectue un double. Elle gagne dans ce cas 5 euros. Combien doit gagner Bob dans les autres cas pour que le jeu soit équitable?

Exercice 2. Une personne joue à la roulette (qui est constituée de 37 cases) et mise 100 euros sur les chiffres pairs (on rappelle que 0 n'est pas pair) et 10 euros sur le chiffre 19. Si elle gagne grâce à un nombre pair, la banque lui reverse 200 euros, si elle gagne grâce au 19, la banque lui reverse 36 euros.

1. Quelle est son espérance de gain?
2. On suppose maintenant que la personne joue plusieurs fois d'affilée, et autant de fois qu'elle le souhaite, mais seulement sur les nombres pairs. Proposer une stratégie gagnante (en un sens à définir).
3. Pourquoi cette stratégie n'est en fait pas très réaliste?

Exercice 3. Probabilité de rencontre Marc et Amélie ont projeté de se retrouver pour boire un café entre 19H et 20H. On sait qu'aucun des deux n'attendra l'autre plus de 10 minutes et on se demande si ils ont "peu ou beaucoup de chance" de se rencontrer. On modélise le problème de la façon suivante: ils arrivent indépendamment et à des instants uniformément distribués entre 19H et 20H.

1. Modéliser le problème: proposer un univers des possibles, une loi de probabilité et calculer sa fonction de répartition.
2. Quelle est la probabilité que Marc et Amélie se rencontrent?
3. Marc décide qu'il arrive à une certaine heure fixée x. Quelle probabilité a-t-il de rencontrer Amélie?
4. Marc est arrivé en premier, quelle probabilité a-t-il de rencontrer Amélie?

Exercice 4. Un canal de transmission transmet des bits avec erreur selon le modèle suivant: il transmet fidèlement un bit avec probabilité p et de façon erronée avec probabilité $1-p$ avec $p \in [0,1]$. On considère n canaux en série, et que chaque canal fonctionne indépendamment des autres. On note X_k le bit reçu en sortie du k-ieme canal et X_0 le bit à l'entrée du premier canal. On désire calculer la probabilité qu'au bout des n canaux, le signal reste inchangé.

1. Que vaut $P(X_{k+1}=1|X_k=0)$ et $P(X_{k+1}=1|X_k=1)$?
2. Posons A_n le vecteur $[P(X_n=0), P(X_n=1)]$. Après avoir introduit une relation de récurrence sur (A_n), les calculer.
3. En déduire la probabilité qu'un bit soit fidèlement transmis au bout de n canaux. Que dire à la limite?

Exercice 5. On considère un dé à 6 faces, que l'on lance une infinité de fois. Une face est rouge et les 5 autres faces sont bleues. On écrit sous forme d'une suite les résultats successifs obtenus, par exemple $BRRBBBRRRBRBRRR\dots$ (B signifiant bleu et R rouge). On s'intéresse à la première série de nombres obtenus, dans le sens suivant, plus simple à définir par des exemples:

1. $BBBRBR\dots$: la première série est BBB.
2. $RBRBBBRBB\dots$: la première série est réduite à R.
3. $RRRRRRRRBR\dots$: la première série est $RRRRRRR$.

On appelle X la variable aléatoire correspondant à la longueur de la première série. Calculer la loi de X et l'espérance de X.