TD 3: Variables aléatoires, lois usuelles discrètes et continues.

Loi de Bernoulli, loi Binomiale

Exercice 1. Soit X_n des variables aléatoires iid (indépendantes identiquement distribuées, c'est-à-dire de même loi) suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $Y_n := X_n X_{n+1}$ et $U_n = Y_1 + \ldots + Y_n$.

1. Quelle est la loi de Y_n?
2. Les Y_i sont-ils deux à deux indépendantes?
3. Calculer l'espérance et la variance de U_n.

Jacques Bernoulli (1654,1705)

Exercice 2. Un voyage organisé (séjour au ski par exemple) peut accueillir 95 personnes. La pratique montre que on peut estimer à 5% la probabilité qu'une réservation soit annulée avant le départ. Le voyagiste fait du surbooking et il accepte 100 réservations. Quelle est la probabilité que le voyagiste soit obligé de refuser un client ayant réservé?

Exercice 3. À l'aide d'une pièce de monnaie équilibrée, trouver une manière de choisir au hasard et uniformément un entier dans $[|0, n|]$.

Loi Géométrique

Exercice 4. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 suivant une même loi géométrique de paramètre p. On appelle $T = max(X_1, X_2)$ et $Z = min(X_1, X_2)$. On pose $q = 1 - p$.

1. Donner l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$, $X_1 - X_2$.
2. Exprimer $X_1 + X_2$ et $|X_1 - X_2|$ en fonction de T et Z.
3. Démontrer que $P(X_1 = X_2) = \frac{p}{1+q}$.
4. Montrer que Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2$. On pourra caractériser Z grâce à sa fonction de répartition.
5. Démontrer que $\{Z = k\} \cap \{T = k\} = \{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\}$. En déduire la loi de T.

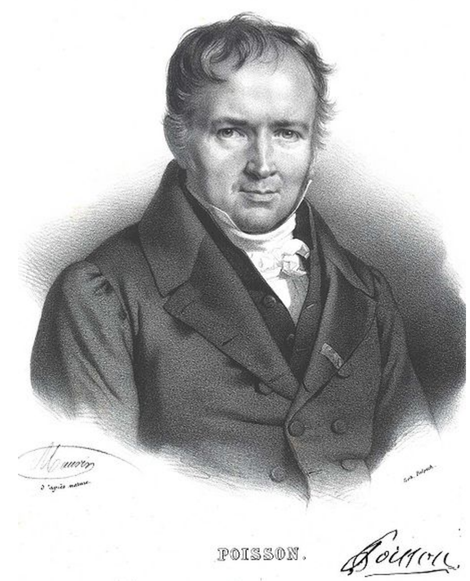
Exercice 5. Soit X une v.a. de loi géométrique de paramètre p $(0 < p < 1)$,

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \qquad k > 0$$

1. Montrer que la loi est sans mémoire, i.e:
$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^{*2}, \qquad P(X > n + k | X > k) = P(X > n).$$
2. Inversement que dire d'une v.a discrète sans mémoire?

Loi de Poisson

Exercice 6. Un insecte pond des oeufs suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Chaque oeuf à une probabilité d'éclore avec une probabilité p, indépendante des autres oeufs. Soit Z le nombre d'oeufs qui ont éclos. Donner la loi de Z et en déduire son espérance.



Siméon Denis Poisson (1781- 1840).

Exercice 7. On s'intéresse aux nombres de clients arrivant à l'un des deux guichets (A et B) d'une banque. Pour cela modélisons le probème de la manière suivante:

Le nombre de client quittant la file d'attente, noté X, est modélisé par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Le choix de guichet A par le $i-$ ème client est modélisé par une loi Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Ainsi Y_i vaut 1 avec probabilité p si le $i-$ème client choisit bien le guichet A et 0 avec probabilité $1-p$ sinon. On supposera de plus que toutes les variables (X, Y_i) sont indépendantes. Posons de plus:

$$S = \sum_{k=1}^{X} Y_k$$

1. Que signifie S?
2. Que vaut $P(S = k|X = n)$?
3. Montrer que S suit une loi de Poisson.
4. En déduire $P(X = n|S = k)$.

Loi Uniforme

Exercice 8. Un skieur doit traverser un glacier d'un longueur l. A l'endroit où il devra traverser, on sait qu'il existe une crevasse avec probabilité p. On suppose que, si cette crevasse existe, sa position est uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, l]$ du trajet. Le skieur a déjà parcouru une distance $x \leq l$ sans encombre et se pose la question: quelle est la probabilité qu'il rencontre une crevasse?

[1] $P(C) = p$. $P(A) + P(B) = p$.

Loi Normale

Exercice 9. Un fermier veut faire de la statistique sur sa production d'oeufs de poule. Il sait que sur les deux milles oeufs recueillis dans la journée, 104 avaient un poids inférieur à 53 grammes et 130 supérieur à 63 grammes.

1. En admettant que la variable aléatoire égale à la masse en gramme d'un oeuf suit une loi normale, donner une estimation des paramètres de cette loi.[2]
2. En déduire le poids moyen d'un oeuf.
3. Combien peut-il espérer vendre de très gros oeufs dans l'année. [3]

Loi Exponentielle

Exercice 10. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densités continues f_X et f_Y. On pose $U = min(X, Y)$ et $V = max(X, Y)$.

1. Calculer La densité de U et V, notès respectivement f_U et f_V. On pourra s'intéresser aux fonctions de répartitions.
2. On considère X_n des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, calculer la loi de $Min(X_1, X_2, \ldots X_n)$.
3. On considère n atomes radioactifs différents qui se fissionent selon une loi exponentielle, l'atome numéro i suivant une loi exponentielle de paramètre λ_i. On considère la variable aléatoire Y représentant le premier atome qui se fissione. Calculer la loi de Y.

[1] on pourra noter A l'événement la crevasse existe dans $[0, x]$, B l'événement la crevasse existe et se trouve après x et C l'événement la crevasse existe.

[2] On pourra utiliser le tableau de la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$

[3] Un très gros oeuf (XL) pèse plus de 73 grammes.