Enoncé et corrigé des exercices donnés à la séance du 21 janvier 2015.

Exercice 1. On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$f_n(x) := \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}.$$

1. Démontrer que f_n est une densité.

   On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où X_n est une loi continue de densité f_n.

2. X_n converge-t-elle en loi?

Exercice 2. Dans un programme de calcul, on choisit d'utiliser J chiffres après la virgules et d'arrondir tous les résultats au plus proche. On suppose que l'on fait 10^6 calculs successifs. Calculer approximativement

$$P(\text{erreur finale en valeur absolue}) \leqslant \frac{10^{-J+3}}{2}.$$

Indication: Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $F_X(\sqrt{3}) \simeq 0.95818$.

Corrigé de l'exercice 1

1. f_n est continue positive et par le changement de variable $t = nx$, i.e. $dx = \frac{dt}{n}$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{n\pi(1+t^2)}dt = \frac{1}{\pi}[Arctan]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})) = 1.$$

2. On calcule les fonctions de répartitions de chaque X_n. En utilisant encore une fois le changement de variable $t = ns$ (donc la borne est changée en nx)

$$\int_{-\infty}^{x} f_n(s)ds = \int_{-\infty}^{nx} \frac{n}{n\pi(1+t^2)}dt = \frac{1}{\pi}[Arctan]_{-\infty}^{nx} = \frac{1}{\pi}(Arctan(nx) + \frac{\pi}{2}).$$

   Cette dernière expression tend (quand $n \to \infty$) vers:

   - 0 si $x < 0$,
   - 1 si $x > 0$,
   - $1/2$ si $x = 0$.

   On a donc que $X_n \to X$ en loi, où X est une loi discrète telle que $P(X = 0) = 1$. En effet, si on calcule la fonction de répartition de X, on constate que l'on a $F_X(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_X(x) = 1$ si $x \geqslant 1$. On a donc bien que $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ en tout point où F_X est continue, i.e. en tout point différent de 0.

Corrigé de l'exercice 2

On note X_i l'erreur (positive ou négative) faite au calcul numéro i. On peut considérer que l'erreur commise à chaque calcul suit une loi uniforme sur $[-10^{-J}/2, 10^{-J}/2]$. (l'erreur est bien entre ces deux valeurs, car on approxime à la décimale au-dessus ou au dessous et donc on ne dépasse pas une erreur en valeur absolue de $10^{-J}/2$). La moyenne de l'erreur est donc nulle ($E(X_1) = 0$), et sa variance est $V(X_1) = 10^{-2J}/12$. On pose $n = 10^6$. L'erreur totale est la somme des erreurs, que l'on note $Z := \sum_1^n X_i$ (erreur totale faite, positive ou négative). Par le théorème de la limite centrale, on a à peu près que

$$\frac{Z - nE(X_1)}{\sqrt{n}\sqrt{V(X_1)}} \sim \mathcal{N}(0,1),$$

i.e. au vu des valeurs de la variance, de l'espérance et de n,

$$\frac{2\sqrt{3}Z}{10^{3-J}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

On pose X une variable aléatoire qui suit une loi gaussienne centrée réduite. On s'intéresse à $P(Z \in [-\frac{10^{-J+3}}{2}, -\frac{10^{-J+3}}{2}])$, qui est bien la probabilité que l'erreur finale en valeur absolue soit plus petite que $\frac{10^{-J+3}}{2}$. On a

$$P(Z \in [-\frac{10^{-J+3}}{2}, -\frac{10^{-J+3}}{2}]) = P(\frac{2\sqrt{3}Z}{10^{3-J}} \in [-\frac{2\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{2}] = P(\frac{2\sqrt{3}Z}{10^{3-J}} \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \simeq F_X(\sqrt{3}) - F_X(-\sqrt{3})].$$

La densité gaussienne étant paire, on démontre très facilement que $F_X(-\sqrt{3}) = 1 - F_X(\sqrt{3})$. On en déduit en utilisant la valeur numérique donnée que

$$P(Z \in [-\frac{10^{-J+3}}{2}, -\frac{10^{-J+3}}{2}]) \simeq 2F_X(\sqrt{3}) - 1 = 1,91636 - 1 = 0,91636.$$

On a donc a peu près 91% de chances de faire une erreur inférieure à trois décimales en plus par rapport à la troncature.