DM

Exercice 1. Calculer le déterminant de la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

est-elle diagonalisable? Justifier.

Exercice 3. On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique P_A. En déduire les valeurs propres de A. Peut-on dire à ce stade si la matrice est triangulable? Diagonalisable?

   On note $\lambda_1 < \lambda_2$ les deux valeurs propres obtenues précedemment, ainsi que E_{λ_1} et E_{λ_2} les sous-espaces propres correspondant.

2. Calculer les vecteurs propres associés à la plus grande valeur propre λ_2. En déduire une base de E_{λ_2}. Quelle est la dimension de E_{λ_2}?

3. Démontrer que $dim(E_{\lambda_1}) + dim(E_{\lambda_2}) \leqslant 4$.

4. En déduire la dimension de E_{λ_1}. La matrice A est-elle diagonalisable? Expliquer.

   Dorénavant, on note

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

5. Calculer les vecteurs propres associés à la valeur propre λ_1. Donner une base de E_{λ_1}. En déduire une matrice de passage P telle que $D = P^{-1}AP$.

6. Calculer P^{-1}.

7. En déduire la valeur de $exp(A)$.

8. La matrice A est-elle inversible? Justifier. Calculer son déterminant. Calculer son inverse à l'aide du théorème de Cayley-Hamilton.

9. On considère le système d'équations différentielles suivant:

$$\left\{\begin{array}{ll} x' & = -2x + 8y + 6z, \\ y' & = -4x + 10y + 6z, \\ z' & = 4x - 8y - 4z. \end{array}\right.$$

Calculer l'ensemble des solutions de ce système. Quelle est sa dimension? Déterminer les solutions (x, y, z) dont chaque composante tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 4. Résoudre l'équation linéaire

$$\left\{\begin{array}{ll} x' & = 4x + 4y, \\ y' & = x + 4y. \end{array}\right.$$

On considère une solution non nulle de ce système. Quelle est la limite de chacune de ses composantes en $+\infty$?