Examen de remise à niveau mathématique

Le barême est donné à titre indicatif. Essayez de ne pas passer plus de 15 mins sur les deux premiers exercices.

Exercice 1. (2 points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice suivante, carrée de taille n:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Déterminer ses valeurs propres. Est-elle diagonalisable? Expliquer.

Exercice 2. (2 points) Calculer le déterminant de la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. (12 points) On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 6 \\ -4 & 11 & 6 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique P_A. En déduire les valeurs propres de A. Peut-on dire à ce stade si la matrice est triangulable? Diagonalisable?

   On note $\lambda_1 < \lambda_2$ les deux valeurs propres obtenues précedemment, ainsi que $E_{\lambda_1} = Ker(A - \lambda_1 I_3)$ et $E_{\lambda_2} = Ker(A - \lambda_2 I_3)$ les sous-espaces propres correspondant.

2. Calculer les vecteurs propres associés à la plus grande valeur propre λ_2. En déduire une base de E_{λ_2}. Quelle est la dimension de E_{λ_2}?

3. Démontrer que $dim(E_{\lambda_1}) + dim(E_{\lambda_2}) \leqslant 3$.

4. En déduire la dimension de E_{λ_1}. La matrice A est-elle diagonalisable? Expliquer.

   Dorénavant, on note
   $$D = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

5. Calculer les vecteurs propres associés à la valeur propre λ_1. Donner une base de E_{λ_1}. En déduire une matrice de passage P telle que $D = P^{-1}AP$.

6. Calculer P^{-1}.

7. En déduire la valeur de $exp(A)$. On rappelle que si Q est une matrice inversible et B est une matrice quelconque, alors $exp(QBQ^{-1}) = Qexp(B)Q^{-1}$.

8. La matrice A est-elle inversible? Justifier. Quel est son déterminant? En déduire l'expression de son inverse en fonction de A.

9. On considère le système d'équations différentielles suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x' & = -x + 8y + 6z, \\ y' & = -4x + 11y + 6z, \\ z' & = 4x - 8y - 3z. \end{array} \right.$$

   Calculer l'ensemble des solutions de ce système. Quelle est sa dimension? Calculer la solution dont la donnée initiale est $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

Exercice 4. (6 points) Résoudre l'équation linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ll} x' & = 5x + 3y, \\ y' & = -8x - 6y. \end{array} \right.$$

Question bonus: quelles sont les solutions (x, y) de ce système dont toutes les composantes tendent vers 0 en $+\infty$?