TD 1: Bases de l'algèbre linéaire

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels réels?

1. $\mathbb{C}$
2. $\mathbb{R}^+$
3. L'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle
$$x'(t) + \sqrt{t^2 + e^{-t^5}}x(t) = 0.$$
4. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle
$$x'(t) + \sqrt{t^2 + e^{-t^5}}x(t) = 1.$$
5. L'ensemble des fonctions réelles à valeurs réelles dérivables en tout point.
6. L'ensemble des fonctions réelles à valeurs réelles non continues.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $F + G$ est aussi un sev de E et que c'est le plus petit sev de E qui contient $F \cup G$.
3. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
4. (difficile) On considère un ev réel E et $F_1, \dots F_n$ n sev de E. Montrer que $F_1 \cup F_2 \dots \cup F_n$ est un sev ssi il existe un certain indice i tq $F_i \supset \bigcup_{j \neq i} F_j$.

Exercice 3. On se place dans $\mathbb{R}^2$. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $\{((0, y)|y \in \mathbb{R}\}$
2. $\{((0, y)|y \geqslant 0\}$
3. $\{((0, y)|y \in \mathbb{R}\} \cap \{((x, 0)|x \in \mathbb{R}\}$
4. $\{((0, y)|y \in \mathbb{R}\} \cup \{((x, 0)|x \in \mathbb{R}\}$
5. $\{((x, y)||x| = |y|\}$
6. $\{((x, y)|x = y\}$

Exercice 4. On considère E l'ensemble des fonctions définies sur $[0, 1]$ à valeurs réelles ($\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel.
2. Montrer que les sous-ensembles suivants sous des sev de E: $F_1 = \{f \in E|f(x) = 0, \forall x \in [0, 1/3]\}$, $F_2 = \{f \in E|f(x) = 0, \forall x \in]1/3, 2/3]\}$ et $F_3 = \{f \in E|f(x) = 0, \forall x \in]2/3, 1]\}$.
3. Montrer que E est somme directe de F_1, F_2, F_3.

Exercice 5. Montrer que $Vect(\{t \mapsto cos(kt)|k \leqslant n\}) = Vect(\{t \mapsto cos(t)^k|k \leqslant n\})$.

Exercice 6. Les espaces vectoriels réels suivants sont-ils de dimension finie? Si oui, donner leur dimension et une base.

1. $\mathbb{C}$
2. L'ensemble des solutions de $x' + 2tx = 0$.

3. L'ensemble des suites réelles.

4. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 3x + 5y\}$.

5. L'ensemble des polynômes à coefficients réels

6. L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à n.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^n$, donner un exemple de sous-espace vectoriel de dimension 0, de dimension 1, de dimension 2,... de dimension $n - 1$.

Exercice 8. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées? Donner leur rang. Sont-elles génératrices de l'espace vectoriel dans lequel elles sont incluses?

1. $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 5)\} \subset \mathbb{R}^3$

2. $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 2, 5)\} \subset \mathbb{R}^3$

3. $\{x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

4. $\{x \mapsto cos(x), x \mapsto cos2x, x \mapsto cos3x, \dots cos(nx)\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

Exercice 9. On considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ h \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ \frac{h}{3} \end{pmatrix}$. Déterminer pour quelles valeurs de $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ la famille $\{u, v, w\}$ est libre et pour quelles valeurs elle est liée. (réponse: liée ssi $h = 1$ ou $k = 1$).

Exercice 10. Montrer que toute famille de $n + 1$ polynômes à coefficients réels ayant tous des degrés différents est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit F un sev de E. Démontrer que F est encore un ev de dimension finie et que sa dimension est inférieure ou égale à n. Démontrer que $dim(F) = n \Leftrightarrow E = F$.

Exercice 12. On considère $a_0, \dots a_n$ $n + 1$ nombres réels distincts et $b_0, \dots, b_n$ $n + 1$ nombres réels (pas forcément distincts). On rappelle que l'ensemble des polynômes réels de dimension inférieure à n est un espace vectoriel de dimension finie $n + 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes dénotée $(L_0, \dots L_n$ telle que pour tout $i \in [|0, n|]$ on a $L_i(a_i) = 1$ et $L_i(a_j) = 0$ si $j \neq i$. Expliciter cette famille de polynômes.

2. Montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout i on a $P(a_i) = b_i$.

4. Trouver l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la propriété précédente.