TD 2: Applications linéaires, matrices, pivot de Gauss.

Exercice 1. Résoudre les systèmes linéaires suivants en utilisant la méthode de Gauss :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z &=& 1 \\ 2x+3y-z &=& 0 \\ 3x+y+2z &=& 0 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z &=& 3 \\ 3x-y-2z &=& 0 \\ x+y-z &=& -2 \\ x+2y+z &=& 1 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& 1 \\ x-y+2z-3t &=& 2 \\ 2x+4z+4t &=& 3 \\ 2x+2y+3z+8t &=& 2 \\ 5x+3y+9z+19t &=& 6 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z+4t &=& 2 \\ 2x+y+z+t &=& 1 \\ 3x-y-3z+2t &=& 5 \\ 5y+9z-t &=& -6 \end{array}\right.$

5. $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z+t &=& 5 \\ 2x+3y+4z+5t &=& 8 \\ 3x+y-z+t &=& 7 \end{array}\right.$

Exercice 2.

1. On se place dans $\mathbb{R}^3$. On considère le plan P d'équation $z = x + y$. Rappeler sa dimension et en donner une base. Trouver un supplémentaire de P (ie. trouver D tel que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$).

   Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires ($F \oplus G = E$). Tout élement de E se décompose de manière unique sous la forme $e = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

2. On appelle *projecteur sur F parallèlement* à G l'application suivante: $p : e = f + g \in E \mapsto f$. Montrer que c'est une application linéaire. Montrer qu'elle vérifie $p \circ p = p$. Quel est son noyau et son image?

3. Dans l'exemple précédent, on considère la projection sur P parallélement à D. Exprimer cette projection dans la base canonique. A quoi correspond-elle géométriquement?

4. On appelle *symétrie par rapport à F parallèlement* à G l'application suivante: $s : e = f + g \mapsto f - g$. Montrer que c'est une application linéaire. Montrer qu'elle vérifie $s \circ s = Id$. Quel est son noyau et son image? Quel est le lien entre s et p?

5. Dans l'exemple précédent, on considère la symétrie sur P parallélement à D. Exprimer cette projection dans la base canonique. A quoi correspond-elle géométriquement?

6. On considère une application de E dans E qui vérifie $p \circ p = p$ (projecteur). Montrer que p est nécessairement une projection sur $Im(p)$ parralélement à $Ker(p)$.

7. On considère une application de E qui vérifie $s \circ s = Id$ (involution). Montrer que s est nécessairement une projection sur $Ker(s - Id)$ parralèlement à $Ker(s + Id)$.

Exercice 3. Déterminer les rangs des familles de vecteurs (écrit sous formes matricielles) suivantes:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & 0 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$, en utilisant le pivot de Gauss.

Exercice 4. Les applications suivantes sont-elles linéaires? Si oui, déterminer l'image, le noyau, le rang, une éventuelle injectivité, surjectivité, bijectivité.

1. $f(x, y, z) = (5x + 3y, 2xy + z)$
2. $f(x, y, z) = (x + 3y, 5x + 7z)$
3. $f(x, y, z) = (x + 2y, 3x + 5y + 2z, 5x + 6z, y)$
4. $f(x, y) = (x + y, x - y)$
5. $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P'$ (polynôme dérivé de P).
6. $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \int_0^1 P(x)dx$.

Exercice 5. Soit f et g deux applications linéaires d'un ev de dimension finie E vers un ev de dimension finie F. Montrer que

$$|rg(f) - rg(g)| \leqslant rg(f + g) \leqslant rg(f) + rg(g).$$

Exercice 6.
1. On considère E l'espace vectoriels des suites réelles et $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in E$. f est-elle linéaire, injective, surjective? Déterminer son noyau et son image.
2. On considère E l'espace vectoriels des suites réelles et $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (0, u_0, u_1, \ldots)$. f est-elle linéaire, injective, surjective? Déterminer son noyau et son image.

Exercice 7. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$, avec E, F et G 3 ev de dimension finie. Démontrer que

$$rg(g) + rg(f) - dim(F) \leqslant rg(g \circ f) \leqslant min(rg(g), rg(f)).$$

Exercice 8. Soit f un endomorphisme d'un ev E tel que pour tout x la famille $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. On note $dim(E) = n$ et $dim(F) = m$. On rappelle que $F \times G$ est un espace vectoriel.

1. On considère une base $e_1, \ldots e_n$ de E et une base $f_1, \ldots, f_n$ de F. Montrer que la famille
$$((e_1, 0), (e_2, 0), \ldots (e_n, 0), (0, f_1), \ldots (0, f_n))$$
est une base de $F \times G$. Qu'en déduire sur la dimension de $F \times G$.
2. On considère l'application $(f, g) \in F \times G \mapsto f + g \in F + G$. Est-il linéaire? Est-elle surjective? Quel est son noyau?
3. En déduire que $dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$.

Exercice 10. Calculer les produits matriciels AB et BA (quand c'est possible) dans les cas suivants.

1. $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 10 \\ 4 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = A$,

5. $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 65 & 44 & 87 & 78 \end{pmatrix}$,$B = A$.

Exercice 11. Soit $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer A_θ^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 12. On considère $n \in \mathbb{N}$ et la matrice suivante de taille $n \times n$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que vaut A^n? A-t-on (comme dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou dans un anneau intègre) de manière générale que si deux matrices B et C vérifient $BC = 0$ alors $B = 0$ ou $C = 0$? Que peut-on ajouter par exemple comme condition sur C pour que $BC = 0 \Rightarrow B = 0$?

Exercice 13. Déterminer, s'il existe, l'inverse des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice $A^2 - 3A + 2I_2$.

2. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.