TD 3: Déterminant, théorie spectrale, exponentielle de matrices.

Exercice 1. Déterminer les déterminants des matrices suivantes, en developpant par rapport aux lignes ou aux colonnes:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2. Calculer le déterminant de la matrice suivante, pour $a \neq b$:

$$\begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots \\ \dots 0 & & 1 & a+b & \end{pmatrix}$$

Faire de même si $a = b$.

Exercice 3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres des applications suivantes:

1. $x \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto x'$.
2. $P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P''$
3. $(u_n) \in (\mathbb{R})^n \mapsto (u_{n+1})$.

Exercice 4. Pour chacune des matrices A réelles suivantes, calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres. La matrice est-elle diagonalisable (resp. trigonalisable) dans $\mathbb{R}$? Dans ce cas, donner une matrice de passage P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale (resp. triangulaire supérieure). Dans le cas où la matrice est inversible, trouver son inverse à l'aide du théorème de Cayley-Hamilton. Dans le cas où la matrice est diagonalisable, donner son exponentielle.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Exercice 5. Calculer l'exponentielle de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\dots & \\ 0 & 0 & 1 & 0\dots \\ \dots & \dots\dots\dots & & \\ 0 & \dots 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B + C$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
2. En déduire l'expression de $\exp(A)$.
3. Calculer à présent $\exp(B)$, $\exp(C)$ puis le produit $\exp(B)\exp(C)$.
4. Comparer les résultats obtenus en questions 2 et 3.

Exercice 7. Le but est de calculer l'exponentielle de la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

On rappelle le résultat suivant: si B et C sont deux matrices qui commutent, alors $e^{B+C} = e^B e^C$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable, trigonalisable?
2. Que dire de $Ker((A-2)^2)$ et $Ker(A-3)$?
3. Calculer $(X-2)^2 - (X-1)(X-3)$.
4. En déduire que $-(A-1)(A-3)$est le projecteur sur $Ker((A-2)^2)$ parallélement à $Ker(A-3)$ (dont la matrice dans la base canonique est notée P_1) et que $(A-2)^2$ est le projecteur sur $Ker(A-3)$ parallèlement à $Ker((A-2)^2)$ (dont la matrice dans la base canonique est notée P_2). Que dire de P_1P_2 et P_2P_1?
5. Soit P une projection. Que vaut $exp(P)$? Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, que vaut $exp(\lambda P)$?
6. Montrer que $A = D + N$ avec $D = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ et $N = (A - \lambda_1 P_1) + (A\lambda_2 P_2)$.
7. En déduire $exp(A)$.