Contrôle d'optimisation combinatoire avancée
MPRO

10 février 2025

Tout objet électronique (smartphone, tablette, ordinateur, calculatrice, etc.) interdit.

Tout document papier autorisé.

1 Deux petits exercices sur les matroïdes uniformes

1.1 Circuits dans les matroïdes uniformes

Question 1 *Montrer qu'un matroïde de rang r est uniforme si et seulement si tous ses circuits sont de cardinal au moins $r+1$.*

1.2 Matroïdes uniformes représentables sur $\mathbb{F}_2$

Question 2 *Soient $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{F}_2$ tels que la somme de trois quelconques d'entre eux est nulle, i.e. $\sum_{i \in I} a_i = 0$ pour tout $I \subseteq [4]$ tel que $|I| = 3$. Montrer qu'alors $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$.*

Question 3 *En déduire que les matroïdes uniformes de rang 2 qui sont représentables sur $\mathbb{F}_2$ ont au plus trois éléments.*

Question 4 *Donner une représentation sur $\mathbb{F}_2$ des matroïdes uniformes de rang 2 à deux et trois éléments.*

2 L'extension de Lovász

Soit V un ensemble fini, dont on note n le cardinal. Dans la totalité de l'exercice, f est une fonction $2^V \to \mathbb{R}$ telle que $f(\varnothing) = 0$.

L'*extension de Lovász* $\hat{f}$ d'une telle fonction est définie comme suit. Pour $x \in [0,1]^V$ et $\lambda \in [0,1]$, on pose $S(x,\lambda) \coloneqq \{v \in V \colon x_v > \lambda\}$. On pose ensuite

$$\hat{f}(x) \coloneqq \mathbb{E}\big[f\big(S(x,\Lambda)\big)\big]\,,$$

où Λ est une variable aléatoire tirée uniformément au hasard sur l'intervalle $[0,1]$.

L'expression de $\hat{f}$ donnée par la question suivante sera particulièrement utile dans la suite. Elle peut d'ailleurs être prise comme définition de l'extension de Lovász.

Question 5 *Soit $x \in [0,1]^V$. Indiçons les éléments de V de sorte que $x_{v_1} \geqslant x_{v_2} \geqslant \cdots \geqslant x_{v_n}$. Montrer que l'on a alors*

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{v_i} - x_{v_{i+1}}) f\big(S(x, x_{v_{i+1}})\big) + x_{v_n} f(V)\,.$$

Question 6 *Soit $x \in \{0,1\}^V$. Posons S l'ensemble des $v \in V$ tels que $x_v = 1$. (Le vecteur x est donc le vecteur indicateur de S.) Montrer qu'alors $\hat{f}(x) = f(S)$.*

Qualifier $\hat{f}$ d'"extension" est donc justifié.

2.1 Convexité et sous-modularité

L'objectif de cette partie est de montrer que l'extension de Lovász est convexe si et seulement si f est sous-modulaire, établissant ainsi un lien frappant entre la convexité et la sous-modularité.

2.1.1 Sous-modularité implique convexité

Question 7 *Montrer que si f est sous-modulaire, alors pour tout $x \in [0,1]^V$, on a*

$$\hat{f}(x) = \max\Big\{\sum_{v \in V} x_v y_v \colon y \in \mathbb{R}^V \ \text{ et } \ y(S) \leqslant f(S) \quad \forall S \subseteq V\Big\}\,.$$

(Dans votre réponse, inutile de justifier des relations déjà établies en cours.)

Question 8 *En déduire que si f est sous-modulaire, alors $\hat{f}$ est convexe.*

2.1.2 Convexité implique sous-modularité

Soient $S, T \subseteq V$. Poser

$$z_v \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{si } v \in S \cap T, \\ 1/2 & \text{si } v \in (S \setminus T) \cup (T \setminus S), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Question 9 *En utilisant la question 5, montrer que $\hat{f}(z) = \frac{1}{2}\big(f(S \cap T) + f(S \cup T)\big)$.*

Question 10 *En déduire que si $\hat{f}$ est convexe, alors f est sous-modulaire.*

2.2 Minimiser l'extension de Lovász

Dans cette partie, on s'intéresse à la minimisation de $\hat{f}$ sur $[0,1]^V$ dans le cas où f est sous-modulaire.

Question 11 *En utilisant la question 5, montrer qu'il existe toujours un vecteur dans* $\{0,1\}^V$ *réalisant le minimum de* $\hat{f}$.

En d'autres termes, $\hat{f}$ atteint son minimum en un sommet du cube $[0,1]^V$.

Question 12 *Expliquer pourquoi trouver un minimiseur de* $\hat{f}$ *sur* $[0,1]^V$ *permet de trouver un minimiseur de* f *sur* 2^V.

3 Toute fonction sous-modulaire entière définit un matroïde

Soit V un ensemble fini et soit $f\colon 2^V \to \mathbb{Z}_+$ une fonction sous-modulaire. Cet exercice va montrer comment on peut définir un matroïde à partir de f. L'exercice procède en trois étape : il considère d'abord le cas où f est croissante et vérifie $f(S) \leqslant |S|$ pour tout $S \subseteq V$, ensuite le cas où f est simplement croissante, et enfin le cas général.

3.1 Première étape

On suppose dans cette partie que f est croissante et que $f(S) \leqslant |S|$ pour tout $S \subseteq V$. Posons

$$\mathcal{I}_{\leqq}^{\nearrow}(f) \coloneqq \{S \subseteq V \colon f(S) = |S|\}\,.$$

Question 13 *Montrer que* $\varnothing \in \mathcal{I}_{\leqq}^{\nearrow}(f)$ *et que si* $S \in \mathcal{I}_{\leqq}^{\nearrow}(f)$*, alors* $S - v \in \mathcal{I}_{\leqq}^{\nearrow}(f)$ *pour tout* $v \in S$.

Le couple $(V, \mathcal{I}_{\leqq}^{\nearrow}(f))$ satisfait donc l'axiome d'hérédité des matroïdes. Pour pouvoir vérifier que $(V, \mathcal{I}_{\leqq}^{\nearrow}(f))$ satisfait aussi l'axiome d'augmentation, la propriété établie dans la question suivante pourra être utile.

Question 14 *Soit* $S \subseteq V$ *tel que* $f(S) = |S|$ *et soit* $T \supseteq S$ *tel que* $f(S+v) = |S|$ *pour tout* $v \in T$*. Montrer que* $f(T) = |S|$.

Question 15 *Conclure que* $(V, \mathcal{I}_{\leqq}^{\nearrow}(f))$ *est un matroïde.*

3.2 Seconde étape

On suppose toujours dans cette partie que f est croissante, mais que l'on n'a pas nécessairement $f(S) \leqslant |S|$ pour tout $S \subseteq V$. Posons

$$\mathcal{I}^{\nearrow}_{\geqslant}(f) \coloneqq \{S \subseteq V \colon f(T) - f(\varnothing) \geqslant |T| \quad \forall T \subseteq S\}\,.$$

On introduit la fonction $g \colon 2^V \to \mathbb{Z}_+$ définie pour $S \subseteq V$ par

$$g(S) \coloneqq \min_{T \subseteq S}\bigl(f(T) + |S \setminus T|\bigr) - f(\varnothing)\,.$$

Question 16 *Montrer que g est croissante.*

Question 17 *Montrer que pour $T \subseteq S$ et $T' \subseteq S'$, on a*

$$|(S \cup S') \setminus (T \cup T')| + |(S \cap S') \setminus (T \cap T')| = |S \setminus T| + |S' \setminus T'|\,.$$

Question 18 *Montrer que g est sous-modulaire.*

Question 19 *Montrer que $\mathcal{I}^{\nearrow}_{\geqslant}(f) = \mathcal{I}^{\nearrow}_{=}(g)$, et conclure.*

3.3 Troisième étape

On ne fait plus d'hypothèses sur f (à part que c'est une fonction sous-modulaire à valeurs entières positives). Définissons

$$\mathcal{I}(f) \coloneqq \Bigl\{S \subseteq V \colon f(T) - \min_{S' \subseteq V} f(S') \geqslant |T \cap S| \quad \forall T \subseteq V\Bigr\}\,.$$

Posons $h \colon 2^V \to \mathbb{Z}$ par $h(S) = \min\{f(T) \colon T \supseteq S\}$.

Question 20 *Montrer que h est une fonction sous-modulaire croissante.*

Question 21 *Montrer que $\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}^{\nearrow}_{\geqslant}(h)$, et conclure.*