Exercices : Matroïdes

MPRO - OCAV

1. Prouver que tout matroïde uniforme est représentable sur $\mathbb{R}$.

2. Prouver que tout matroïde graphique est représentable sur $\mathbb{F}_2$ (le corps à deux éléments).

3. Caractériser les matroïdes uniformes de rang 2 qui sont graphiques.

4. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Posons

$$\mathcal{I} = \{I \subseteq V : \text{il existe un couplage de cardinal maximal ne couvrant aucun sommet de } I\}.$$

Montrer que $(V, \mathcal{I})$ est un matroïde.

5. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Posons $\mathcal{I} = \{I \subseteq V : \text{il existe un couplage couvrant } I\}$. Montrer que $(V, \mathcal{I})$ est un matroïde. (C'est le *matroïde de couplages*.)

6. Une *pseudo-forêt* est un graphe dont chaque composante connexe a au plus un cycle. Soit $G = (V, E)$ un graphe, et posons $\mathcal{P}$ l'ensemble de pseudo-forêts couvrantes de G. Montrer que $(E, \mathcal{P})$ forme un matroïde. (Indication : considérer le matroïde transversal construit sur un graphe biparti dont un côté est formé par V, l'autre par E, et avec des arêtes bien choisies.)

7. Soit $M = (V, \mathcal{I})$ un matroïde.

   (i) Soient C, C' deux circuits distincts de M. Montrer que $r(C \cup C') \leqslant |C \cup C'| - 2$.

   (ii) En déduire cette propriété fondamentale des matroïdes : *Si I est un indépendant de M et x un élément quelconque de M, alors $I + x$ contient au plus un circuit.*

8. Soit $M = (V, \mathcal{I})$ un matroïde et $w \colon V \to \mathbb{R}$ une fonction de poids. Posons

$$\widetilde{w} \colon X \in 2^V \longmapsto \min\{w(v) \colon v \in X\} \in \mathbb{R}.$$

Montrer que l'algorithme glouton vu en cours permet aussi de trouver la base de M maximisant $\widetilde{w}(B)$.

9. Soit V un ensemble fini et $\mathcal{B} \subseteq 2^V$. Prouver que $\mathcal{B}$ est l'ensemble des bases d'un matroïde si et seulement si

   (i) $\mathcal{B} \neq \varnothing$.

   (ii) Pour tout $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et tout $y \in B_2 \setminus B_1$, il existe $x \in B_1 \setminus B_2$ tel que $B_1 - x + y \in \mathcal{B}$.

10. Considérons un ensemble V de vecteurs de $\mathbb{R}^d$. Chacun de ces vecteurs est coloré à l'aide d'une couleurs prise dans un ensemble C. Plusieurs vecteurs peuvent avoir la même couleur. L'*étendue* d'un sous-ensemble X de V est définie par

$$e(X) = \mathrm{rg}(X) - |\{c \in C \colon \text{aucun vecteur hors de } X \text{ est de couleur } c\}.$$

Noter que l'étendue peut être négative.
On dit qu'un sous-ensemble S de V est un *arc-en-ciel* si S forme un système libre et si chaque vecteur dans S est d'une couleur distincte.

   (i) Montrer que le plus grand arc-en-ciel est de cardinal égal à $|C| + \min_{X \subseteq V} e(X)$.

   (ii) Peut-on trouver un arc-en-ciel de cardinal maximal en temps polynomial ?

11. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Supposons donnée une fonction $o\colon V \to \mathbb{N}$. On souhaite orienter chaque arête e de G de manière à ce que le degré sortant de chaque sommet soit au plus égal à $o(v)$.

(i) Montrer que ce problème peut être résolu en temps polynomial par intersection de matroïdes.

(ii) Toujours en s'appuyant sur l'intersection de matroïdes, montrer qu'il existe une telle orientation si et seulement si l'on a $|E[X]| \leqslant o(X)$ pour tout $X \subseteq V$.

(On peut également résoudre ce problème en utilisant la théorie des flots.)

12. Le problème de l'existence d'un chemin hamiltonien dans un graphe orienté est NP-complet. En déduire que le problème consistant à chercher l'indépendant de cardinal maximal commun à trois matroïdes est NP-dur (dans le modèle de l'oracle d'indépendance).