Exercices : Fonctions sous-modulaires

MPRO - OCAV

1. Montrer qu'une fonction $f\colon 2^V \to \mathbb{R}$ est sous-modulaire si et seulement si

$$f(S \cup \{i\}) - f(S) \geqslant f(S \cup \{i,j\}) - f(S \cup \{j\})$$

pour tout $S \subseteq V$ et tous $i, j \notin S$.

2. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Pour $F \subseteq E$, on définit $f(F) \coloneqq |\{v \in V\colon \delta(v) \cap F \neq \varnothing\}|$. Montrer que f est sous-modulaire.

3. Soit $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction concave. Soit V un ensemble fini. Montrer que la fonction $f\colon 2^V \to \mathbb{R}$ définie par $f(S) = h(|S|)$ est sous-modulaire.

4. Soit $f\colon 2^V \to \{1, 2, \ldots\}$ une fonction monotone. Le *ratio de sous-modularité de* f est la quantité

$$q(f) \coloneqq \min_{S \subseteq T \subseteq V} \frac{\sum_{i \in T \setminus S} \big(f(S \cup \{i\}) - f(S)\big)}{f(T) - f(S)}\,.$$

Montrer que f est sous-modulaire si et seulement si $q(f) \geqslant 1$.

5. Une fonction $f\colon 2^V \to \mathbb{R}$ est *modulaire* si $f(S) + f(T) = f(S \cup T) + f(S \cap T)$ pour tous $S, T \subseteq V$. Montrer que f est modulaire si et seulement s'il existe $w\colon V \to \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $f(S) = w(S) + \gamma$ pour tout $S \subseteq V$.

6. Considérons n espèces animales, chacune représentée par un mot fini w_i sur l'alphabet $\{\mathrm{A}, \mathrm{C}, \mathrm{G}, \mathrm{T}\}$. L'*information génétique commune* d'un ensemble $S \subseteq [n]$ d'espèces est définie par

$$\mathcal{I}(S) \coloneqq \Big| \bigcup_{i \in S, j \in V \setminus S} \big\{u\colon u \text{ est un sous-mot de } w_i \text{ et de } w_j\big\} \Big|\,.$$

Montrer que $\mathcal{I}(S)$ est sous-modulaire.

7. Soit $G = (V, E)$ une forêt. Pour tout $X \subseteq E$, on définit $f(X) \coloneqq \sum_K \mathrm{diam}(K)$, où K parcourt les composantes connexes de (V, X), et où $\mathrm{diam}(K)$ est la longueur de la plus longue chaîne dans K.

— Montrer que pour tous s, t, u, v de V, on a

$$\max\{\mathrm{dist}(s,u) + \mathrm{dist}(t,v), \mathrm{dist}(t,u) + \mathrm{dist}(s,v)\} \geqslant \mathrm{dist}(s,t) + \mathrm{dist}(u,v)\,.$$

— En déduire que l'on a $f(X) + f(Y) \geqslant f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$ pour tous $X, Y \subseteq V$ tels (VX, X) est connexe, (VY, Y) est connexe et $VX \cap VY \neq \varnothing$. ($VX$ et VY sont respectivement les sommets incidents à X et ceux incidents à Y.)

— (Difficile) Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement les ensembles d'arêtes des composantes connexes de (V, X) et (V, Y). Notons $\mathcal{F}$ l'union de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, en faisant deux copies d'éventuels ensembles présents dans $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Montrer que $\sum_{Z \in \mathcal{F}} f(Z) = f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$.

— En déduire que f est sous-modulaire.