

Les travaux mathématiques de Pierre Duchet

Frédéric Meunier

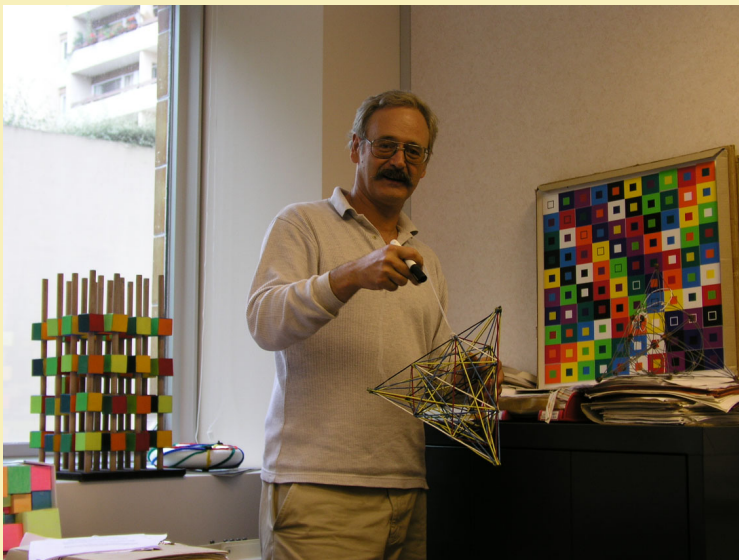
16 février 2019

Journée d'hommage à Pierre Duchet

Sujet de prédilection de Pierre Duchet : **les graphes et la combinatoire**

Titre de sa thèse : *Représentations, Noyaux en Théorie des Graphes et Hypergraphes*

Soutenue en 1979, sous la direction de Claude Berge



Ici avec quelques plans projectifs et affines, un graphe complet torique,
et un morceau de pavage d'un carré avec des cubes différents de côté entier...

mais ma spécialité mathématique favorite est la **convexité** géométrique ou abstraite,
en particulier dans les graphes

Here with a toroidal complete graph, some affine or projective planes,

Plan de l'exposé

Les noyaux de graphes

- Les jeux combinatoires

- Noyaux

- La conjecture de Berge et Duchet

Convexité abstraite dans les graphes

- La convexité

- Carathéodory, Helly et Radon

- Les espaces de segments

Bibliographie

Plan de l'exposé

Les noyaux de graphes

Les jeux combinatoires

Noyaux

La conjecture de Berge et Duchet

Convexité abstraite dans les graphes

La convexité

Carathéodory, Helly et Radon

Les espaces de segments

Bibliographie

Plan de l'exposé

Les noyaux de graphes

Les jeux combinatoires

Noyaux

La conjecture de Berge et Duchet

Convexité abstraite dans les graphes

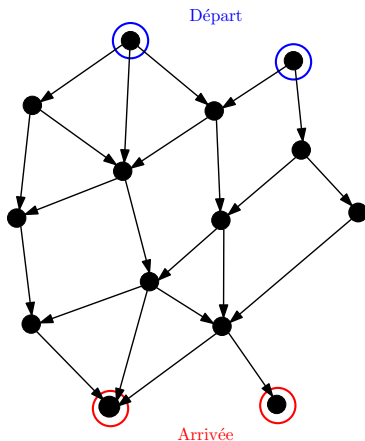
La convexité

Carathéodory, Helly et Radon

Les espaces de segments

Bibliographie

Un jeu

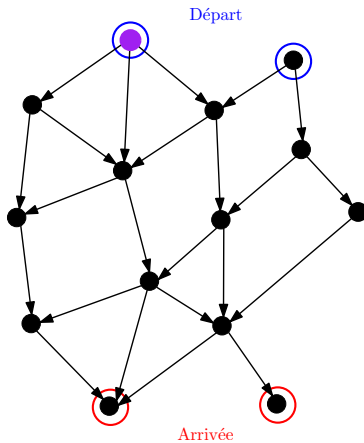


Alice et Bob déplacent à tour de rôle un palet ●.

- Alice choisit un emplacement de **départ**.
- Bob le déplace le long d'un arc →.
- Puis Alice fait de même.
- ...
- Le premier qui place le palet sur un emplacement d'**arrivée** a gagné.

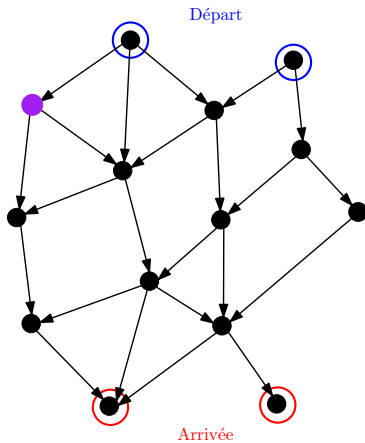
Un exemple de partie

Alice joue



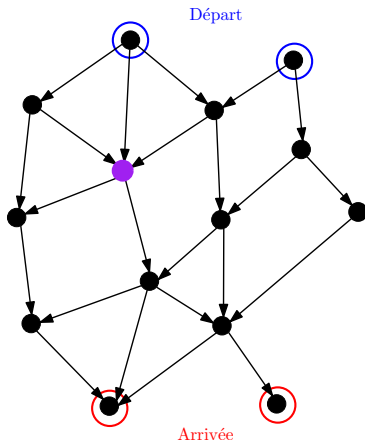
Un exemple de partie

Bob joue



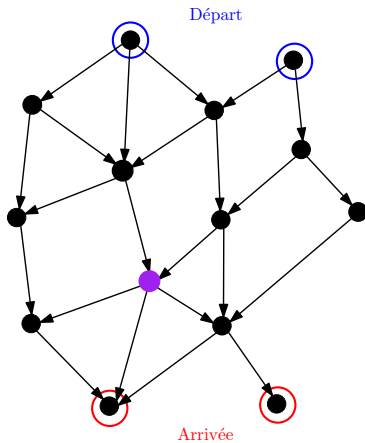
Un exemple de partie

Alice joue



Un exemple de partie

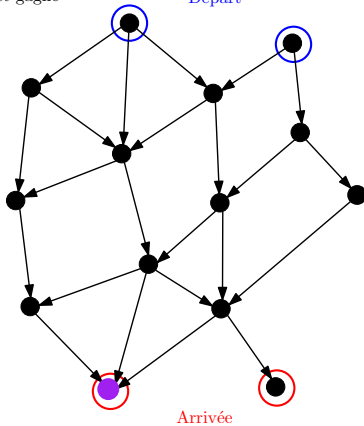
Bob joue



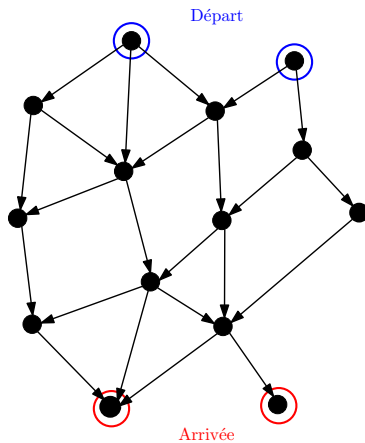
Un exemple de partie

Alice joue et gagne

Départ

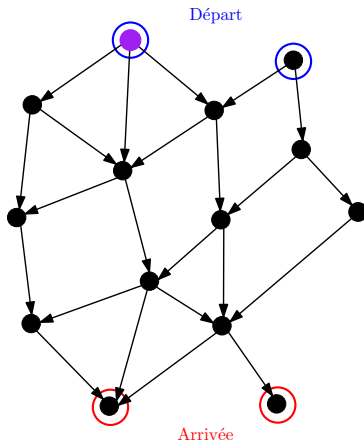


Un autre exemple



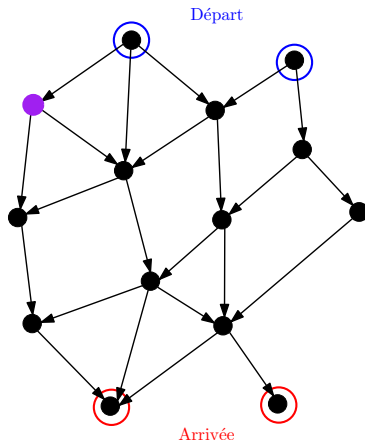
Un autre exemple

Alice joue



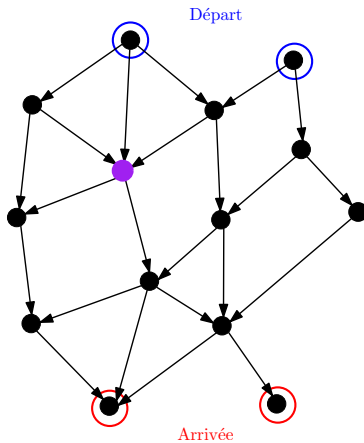
Un autre exemple

Bob joue



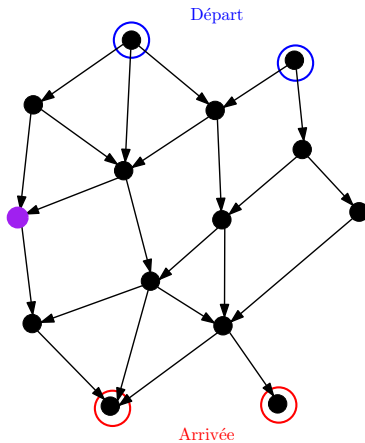
Un autre exemple

Alice joue



Un autre exemple

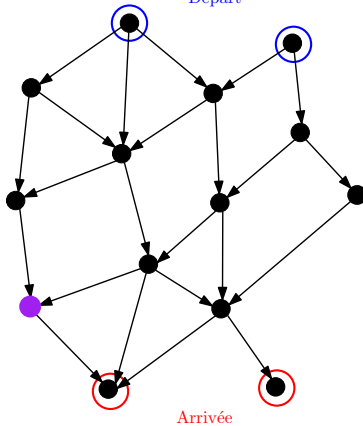
Bob joue



Un autre exemple

Alice joue

Départ

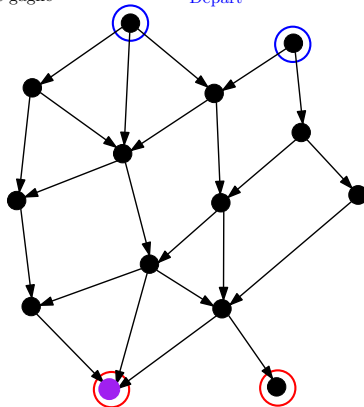


Arrivée

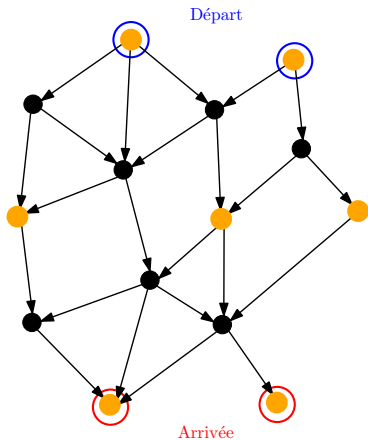
Un autre exemple

Bob joue et gagne

Départ

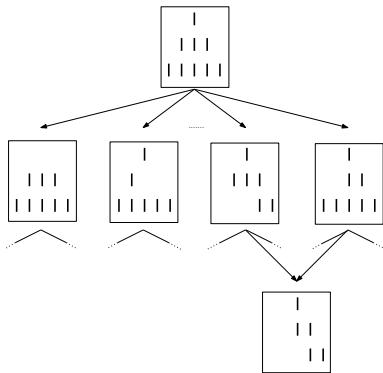


Positions gagnantes



Jeux combinatoires

Jeux combinatoires = jeux qui peuvent être représentés sous la forme précédente



Les échecs, les dames n'entrent pas exactement dans cette catégorie.

Plan de l'exposé

Les noyaux de graphes

Les jeux combinatoires

Noyaux

La conjecture de Berge et Duchet

Convexité abstraite dans les graphes

La convexité

Carathéodory, Helly et Radon

Les espaces de segments

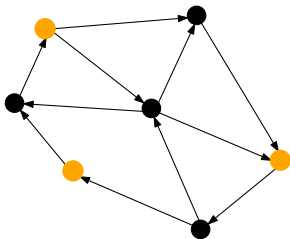
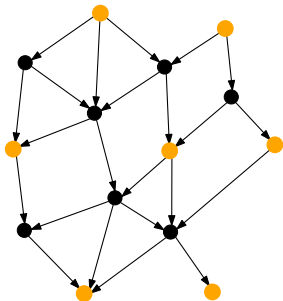
Bibliographie

Noyaux

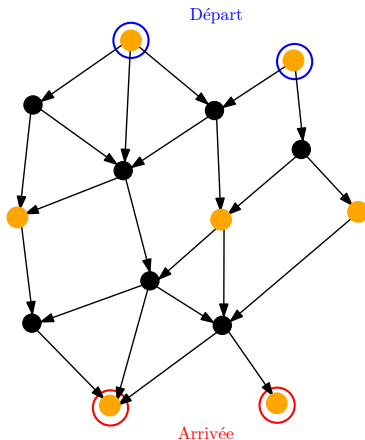
Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté.

Sous-ensemble $N \subseteq V$ de sommets est un **noyau** si simultanément :

- Deux sommets quelconques de N ne sont jamais adjacents.
- De tout sommet hors de N part au moins un arc arrivant sur un sommet dans N .



Positions gagnantes=noyau

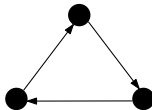


● = positions gagnantes = noyau

Noyaux de graphe

- ♣ Sujet à l'intersection des graphes et des jeux.
- ♣ Introduits par Von Neumann et Morgenstern en 1944.
- ♣ Rôle important dans l'étude des jeux combinatoires et des jeux coalitionnels.

- ♣ Tout graphe n'a pas forcément un noyau :

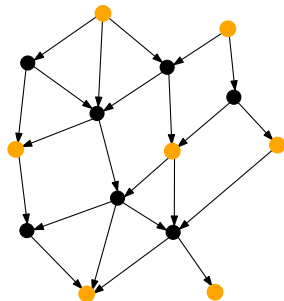
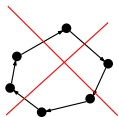


- ♣ **Programme de recherche.** Trouver des conditions simples assurant l'existence d'un noyau.
- ♣ Pierre Duchet a été l'un des chercheurs les plus actifs sur ce sujet.

Un premier théorème

Théorème (Von Neumann et Morgenstern, 1944)

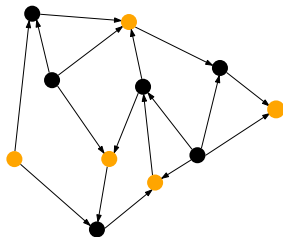
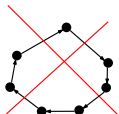
Tout graphe sans circuit admet un noyau.



Une généralisation

Théorème (Richardson, 1953)

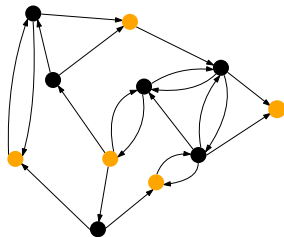
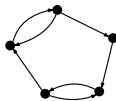
Soit D un graphe orienté. Si tout circuit est de longueur paire, alors D a un noyau.



Encore plus fort !

Théorème (Duchet, 1980)

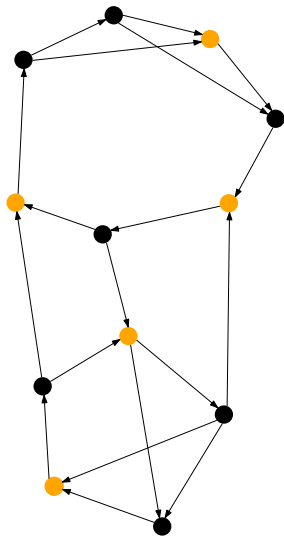
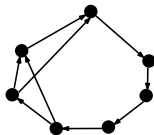
Soit D un graphe orienté. Si tout circuit impair a au moins deux paires d'arcs réversibles, alors D a un noyau.



Un autre théorème

Théorème (Duchet et Meyniel, 1983)

Soit D un graphe orienté. Si tout circuit impair possède deux cordes courtes croisées, alors D a un noyau.



Plan de l'exposé

Les noyaux de graphes

Les jeux combinatoires

Noyaux

La conjecture de Berge et Duchet

Convexité abstraite dans les graphes

La convexité

Carathéodory, Helly et Radon

Les espaces de segments

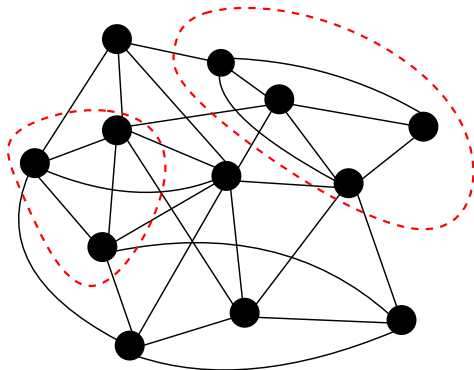
Bibliographie

Clique

Clique de G : sous-ensemble de sommets tous reliés 2 à 2.

Nombre de clique de G :

- ★ nombre maximum de sommets dans une clique
- ★ noté $\omega(G)$



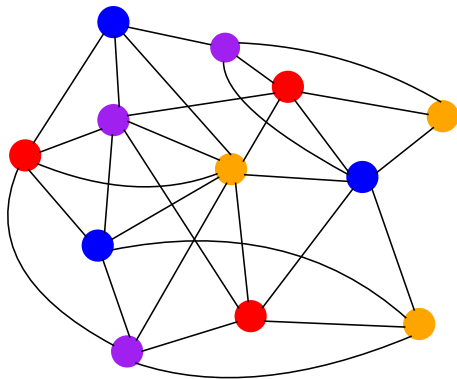
Ici, $\omega(G) = 4$

Coloration

Coloration propre de G : coloration de ses sommets telle que deux sommets adjacents ont des couleurs distinctes.

Nombre chromatique de G :

- ★ nombre minimum de couleurs dans une coloration propre
- ★ noté $\chi(G)$



Ici, $\chi(G) = 4$

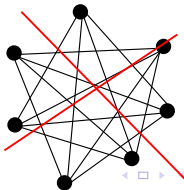
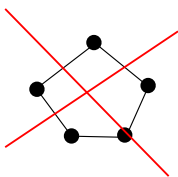
Graphes parfaits

♣ On a toujours $\omega(G) \leq \chi(G)$.

♣ G est **parfait** si $\omega(H) = \chi(H)$ pour tout sous-graphe induit H de G .

♣ Graphes parfaits = classe de graphes fondamentale (optimisation combinatoire, théorie de l'information, etc.).

♣ Conjecture de Berge (1963): Un graphe est parfait si et seulement si il ne possède ni trou impair, ni antitrou impair.
(C'est désormais un théorème, prouvé par Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas en 2006.)



La conjecture de Berge et Duchet

♣ Un graphe orienté est **noyau-parfait** si tout sous-graphe induit admet un noyau.

♣ Une **orientation normale** d'un graphe oriente chaque arête sans faire apparaître



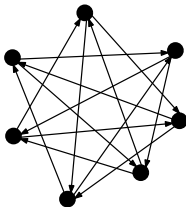
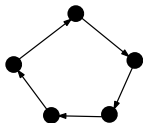
Conjecture de Berge et Duchet (1983):

Un graphe est parfait si et seulement si toute orientation normale produit un graphe noyau-parfait.

La conjecture de Berge et Duchet

Conjecture de Berge et Duchet (1983) :

Un graphe est parfait si et seulement si
toute orientation normale produit un graphe
noyau-parfait.



n'ont pas de noyaux.

La conjecture de Berge et Duchet : épilogue ?

♣ Boros et Gurvich, 1996 : parfait \implies noyau-parfait
(Preuve utilise la [théorie des jeux](#) !)

♣ Corollaire du théorème de Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas de 2006 : noyau-parfait \implies parfait

♣ Une question reste ouverte :

- ☐ toute orientation normale d'un graphe parfait possède un noyau ;
- ☐ mais sait-on en trouver un efficacement ?

Plan de l'exposé

Les noyaux de graphes

Les jeux combinatoires

Noyaux

La conjecture de Berge et Duchet

Convexité abstraite dans les graphes

La convexité

Carathéodory, Helly et Radon

Les espaces de segments

Bibliographie

Plan de l'exposé

Les noyaux de graphes

Les jeux combinatoires

Noyaux

La conjecture de Berge et Duchet

Convexité abstraite dans les graphes

La convexité

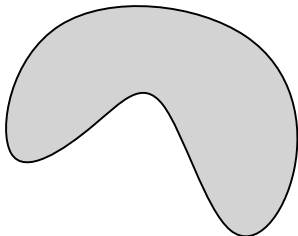
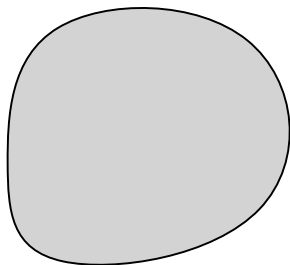
Carathéodory, Helly et Radon

Les espaces de segments

Bibliographie

La convexité usuelle

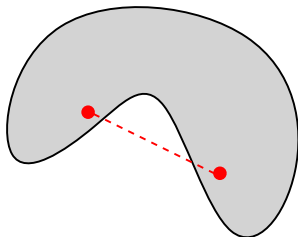
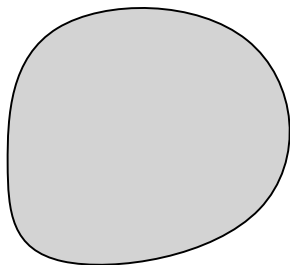
Une partie C de \mathbb{R}^d est **convexe** si pour tout $x, y \in C$, on a $[x, y] \in C$.



La figure de gauche est convexe ; celle de droite ne l'est pas

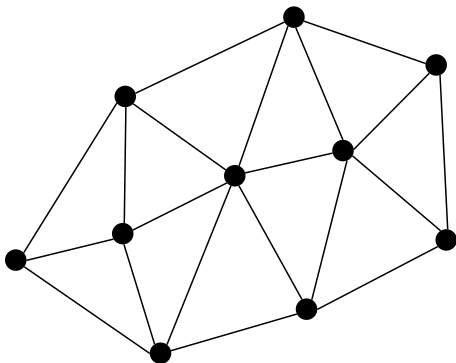
La convexité usuelle

Une partie C de \mathbb{R}^d est **convexe** si pour tout $x, y \in C$, on a $[x, y] \in C$.



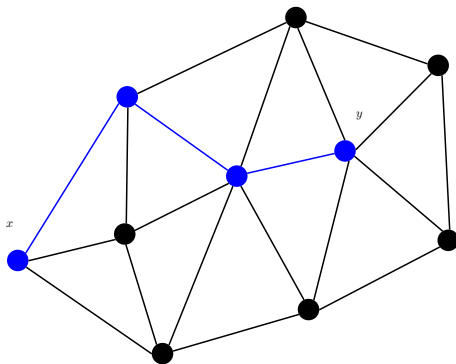
La figure de gauche est convexe ; celle de droite ne l'est pas

Graphes et chaînes sans corde



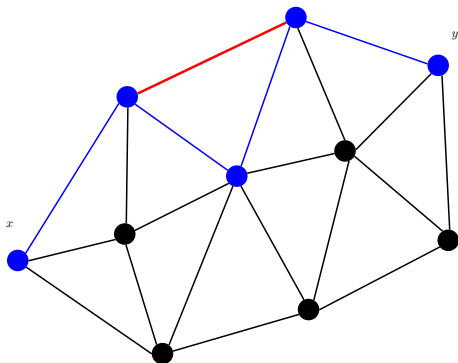
Un graphe non-orienté $G = (V, E)$

Graphes et chaînes sans corde



Une x - y chaîne sans corde

Graphes et chaînes sans corde



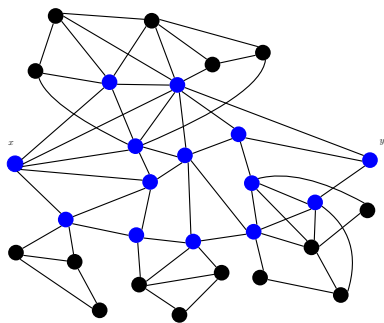
Une x - y chaîne avec corde

Toutes les x - y chaînes sans corde

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Pour $x, y \in V$:

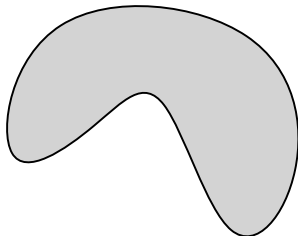
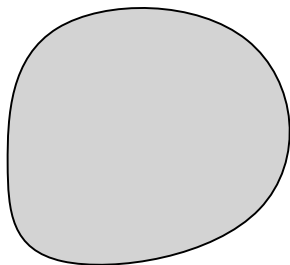
$[x, y] = \{\text{sommets de toutes les } x\text{-}y \text{ chaînes sans corde}\}.$



$[x, y] = \text{ensemble des sommets } \bullet$

Convexité et M -convexité

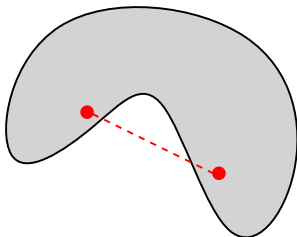
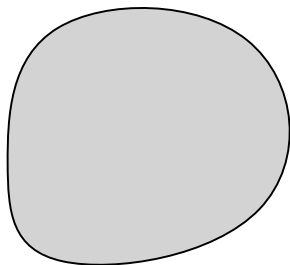
Une partie C de \mathbb{R}^d est convexe si pour tout $x, y \in C$, on a $[x, y] \in C$.



La figure de gauche est convexe ; celle de droite ne l'est pas

Convexité et M -convexité

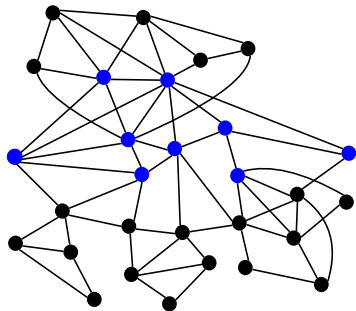
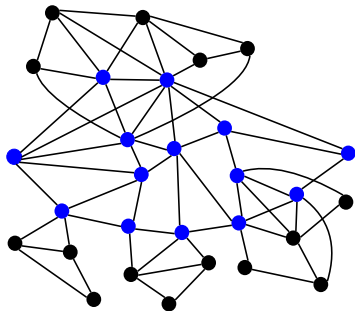
Une partie C de \mathbb{R}^d est convexe si pour tout $x, y \in C$, on a $[x, y] \in C$.



La figure de gauche est convexe ; celle de droite ne l'est pas

Convexité et M -convexité

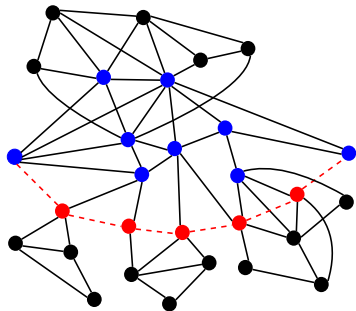
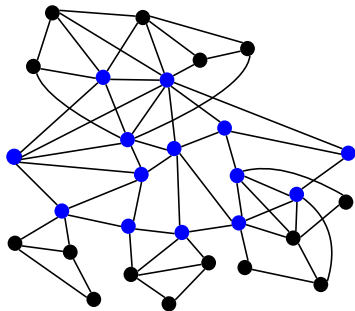
Une partie C de V est M -convexe si pour tout $x, y \in C$, on a $[x, y] \in C$.



La figure de gauche est M -convexe ; celle de droite ne l'est pas

Convexité et M -convexité

Une partie C de V est M -convexe si pour tout $x, y \in C$, on a $[x, y] \in C$.

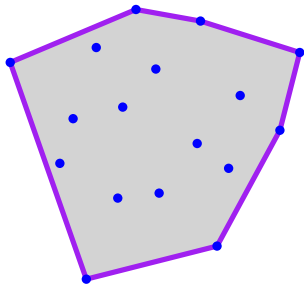


La figure de gauche est M -convexe ; celle de droite ne l'est pas

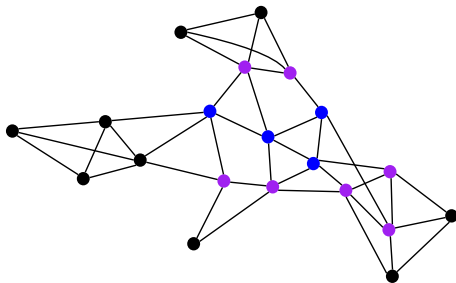
Enveloppe convexe

enveloppe convexe d'un ensemble S de points :

- plus petit convexe contenant S
- noté $\text{conv}(S)$



$\text{conv}(S)$ pour la convexité usuelle



$\text{conv}(S)$ pour la M -convexité

Plan de l'exposé

Les noyaux de graphes

Les jeux combinatoires

Noyaux

La conjecture de Berge et Duchet

Convexité abstraite dans les graphes

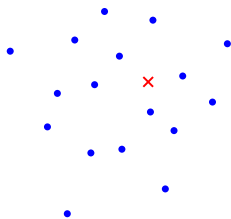
La convexité

Carathéodory, Helly et Radon

Les espaces de segments

Bibliographie

Trois théorèmes fondamentaux de géométrie discrète



Carathéodory, 1907.

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^d$ et $p \in \text{conv}(S)$.
Il existe alors $P \subseteq S$ tel que
 $|P| \leq d + 1$ et $p \in \text{conv}(P)$.

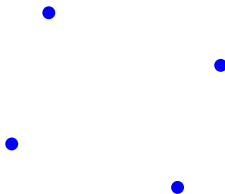
Nombre de Carathéodory = $d + 1$



Helly, 1913.

Considérons une famille de
convexes de \mathbb{R}^d . Si toute
sous-famille de $d + 1$
d'entre eux a une
intersection non-vide, alors
toute la famille a une
intersection non-vide.

Nombre de Helly = $d + 1$

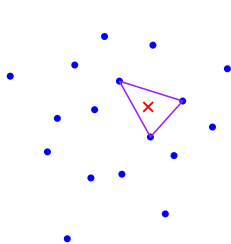


Radon, 1921.

Soit S un ensemble de $d + 2$
points dans \mathbb{R}^d . Il est alors
possible de le partitionner
en deux sous-ensembles S_1
et S_2 tels que
 $\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) \neq \emptyset$.

Nombre de Radon = $d + 2$

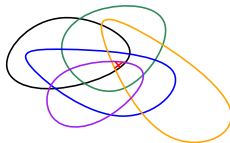
Trois théorèmes fondamentaux de géométrie discrète



Carathéodory, 1907.

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^d$ et $p \in \text{conv}(S)$.
Il existe alors $P \subseteq S$ tel que
 $|P| \leq d + 1$ et $p \in \text{conv}(P)$.

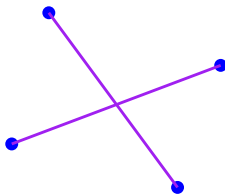
Nombre de Carathéodory = $d + 1$



Helly, 1913.

Considérons une famille de
convexes de \mathbb{R}^d . Si toute
sous-famille de $d + 1$
d'entre eux a une
intersection non-vide, alors
toute la famille a une
intersection non-vide.

Nombre de Helly = $d + 1$



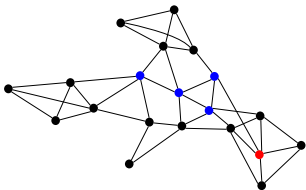
Radon, 1921.

Soit S un ensemble de $d + 2$
points dans \mathbb{R}^d . Il est alors
possible de le partitionner
en deux sous-ensembles S_1
et S_2 tels que
 $\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) \neq \emptyset$.

Nombre de Radon = $d + 2$

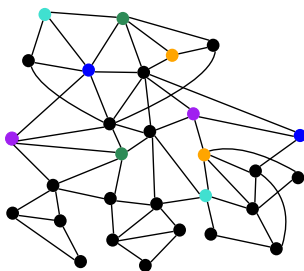
Leurs équivalents pour la M -convexité

Duchet, 1988.



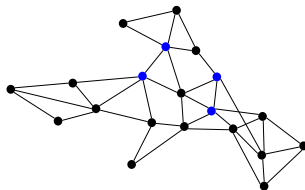
Soit $S \subseteq V$ et $p \in \text{conv}(S)$.
Il existe alors $P \subseteq S$ tel que
 $|P| \leq 2$ et $p \in \text{conv}(P)$.

Nombre de Carathéodory = 2



Considérons une famille de
 M -convexes. Si toute
sous-famille de $\omega(G)$ d'entre
eux a une intersection
non-vide, alors toute la
famille a une intersection
non-vide.

Nombre de Helly = $\omega(G)$

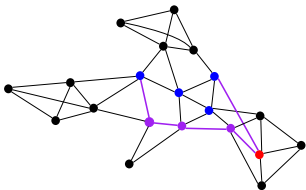


Soit S un ensemble de
 $\omega(G) + 1$ sommets. Si
 $\omega(G) \geq 3$, alors il est
possible de le partitionner
en deux sous-ensembles S_1
et S_2 tels que
 $\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) \neq \emptyset$.

Nombre de Radon = $\omega(G) + 1$
si $\omega(G) \geq 3$

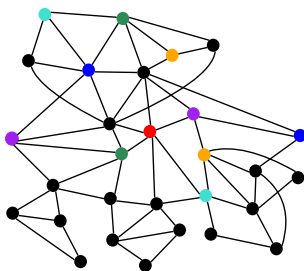
Leurs équivalents pour la M -convexité

Duchet, 1988.



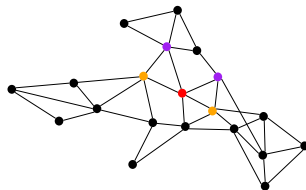
Soit $S \subseteq V$ et $p \in \text{conv}(S)$.
Il existe alors $P \subseteq S$ tel que
 $|P| \leq 2$ et $p \in \text{conv}(P)$.

Nombre de Carathéodory = 2



Considérons une famille de
 M -convexes. Si toute
sous-famille de $\omega(G)$ d'entre
eux a une intersection
non-vide, alors toute la
famille a une intersection
non-vide.

Nombre de Helly = $\omega(G)$



Soit S un ensemble de
 $\omega(G) + 1$ sommets. Si
 $\omega(G) \geq 3$, alors il est
possible de le partitionner
en deux sous-ensembles S_1
et S_2 tels que
 $\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) \neq \emptyset$.

Nombre de Radon = $\omega(G) + 1$
si $\omega(G) \geq 3$

Plan de l'exposé

Les noyaux de graphes

Les jeux combinatoires

Noyaux

La conjecture de Berge et Duchet

Convexité abstraite dans les graphes

La convexité

Carathéodory, Helly et Radon

Les espaces de segments

Bibliographie

Les espaces de segments

Pour la M -convexité, le nombre de Carathéodory est toujours égal à 2.

On dit que les ensembles M -convexes d'un graphe forment un **espace de segments**.

Théorème (Duchet, 2008)

Pour tout choix d'entiers $h \geq 2$ et r , il existe un espace de segments dont le nombre de Helly est h et le nombre de Radon est r si et seulement si

$$h + 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{3h}{2} \right\rfloor + 1.$$

(Répond à une question posée par Kay et Womble en 1971.)

Merci pour votre attention.

Plan de l'exposé

Les noyaux de graphes

- Les jeux combinatoires

- Noyaux

- La conjecture de Berge et Duchet

Convexité abstraite dans les graphes

- La convexité

- Carathéodory, Helly et Radon

- Les espaces de segments

Bibliographie

Quelques éléments bibliographiques



C. Berge et P. Duchet, Recent problems and results about kernels in directed graphs, *Discrete Mathematics*, 86, 27–31, 1990.



E. Boros et V. Gurvich, Perfect graphs are kernel solvable, *Discrete Mathematics*, 159, 35–55, 1996.



P. Duchet, Graphes Noyau-parfaits, *Annals of Discrete Mathematics*, 9, 93–101, 1980.



P. Duchet, Convex Sets in Graphs, II. Minimal Path Convexity, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 44, 307–316, 1988.



P. Duchet, Radon and Helly numbers of segment spaces, *Convexity in discrete structures*, 57–71, *Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser.*, 5, Ramanujan Math. Soc., Mysore, 2008.



P. Duchet et H. Meyniel, Une généralisation du théorème de Richardson sur l'existence de noyaux dans les graphes orientés, *Discrete Mathematics*, 43, 21–27, 1983.