CONTRÔLE “GRAPHES AVANCÉS”
PARTIE “MATROÏDES”
2020-2021

Tout document papier autorisé.

1. Matroïde dual

1.1. **Définition.** Posons

$$\mathcal{I}^* = \{I \subseteq V : V \setminus I \text{ contient une base de } M\} .$$

Le but de cette sous-section est de montrer que $M^* = (V, \mathcal{I}^*)$ est également un matroïde, appelé *matroïde dual* de M.

Question 1. *Montrer que si $I \in \mathcal{I}^*$ et $J \subseteq I$, alors $J \in I^*$.*

Soient $R, S \in \mathcal{I}^*$ tels que $|R| < |S|$. Notons B et B' des bases de M telles que

$$B \subseteq V \setminus R \qquad \text{et} \qquad B' \subseteq V \setminus S .$$

Question 2. *En utilisant B et $B' \setminus R$, Montrer qu'il existe une base B'' de M telle que*

$$B' \setminus R \subseteq B'' \subseteq V \setminus R .$$

(Indication : considérer les indépendants de M suivants : $B' \setminus R$ et B.)

Question 3. *Montrer que $|B'| < |S \setminus R| + |B' \setminus R|$.*

Question 4. *En déduire que $S \setminus R \nsubseteq B''$. (Indication : noter que $B' \setminus R$ et $S \setminus R$ sont disjoints.)*

Question 5. *Conclure.*

1.2. **Quelques propriétés.** Soit $M = (V, \mathcal{I})$ un matroïde.

Question 6. *À quoi correspondent les bases de M^* en termes des bases de M ?*

Question 7. *Démontrer que $(M^*)^* = M$.*

Question 8. *Démontrer que pour tout $U \subseteq V$, on a*

$$r_{M^*}(U) = |U| + r_M(V \setminus U) - r_M(V) .$$

1.3. **Graphes planaires.** Soit $G = (X, E)$ un graphe planaire plongé connexe. Notons alors $G^* = (X^*, E^*)$ son *dual* défini comme suit.

- les sommets de G^* sont les faces de G.
- chaque arête e de G fournit une arête e^* de G^* reliant les faces séparées par e (dans certains cas, ces faces sont en fait une seule et même face, auquel cas l'arête e^* est un boucle). Noter qu'en particulier $|E| = |E^*|$.

Les faits suivants peuvent être acceptés sans preuve :

(i) G^* est planaire connexe.

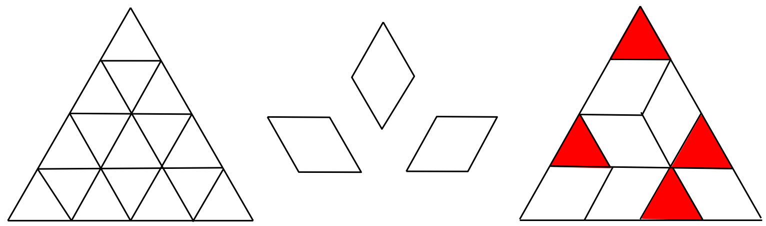

FIGURE 1. À gauche, un triangle équilatéral subdivisé en petits triangles équilatéraux unitaires ; au centre, les trois types de losanges unitaires possibles ; à droite, quatre triangles "up" à supprimer pour pouvoir paver le restant avec des losanges.

(ii) $F \subseteq E$ est tel que $(X, E \setminus F)$ est connexe si et seulement si (X^*, F^*), avec $F^* = \{e^* \colon e \in F\}$, est une forêt.

Pour un graphe H, on note $M(H)$ le matroïde graphique associé à H.

Question 9. *Démonter que $M(G^*)$ et $(M(G))^*$ sont isomorphes.*

Question 10. *Déduire des questions 8 et 9 une preuve directe de la formule d'Euler :*

$$(\text{nombre de faces de } G) - |E| + |X| = 2\,.$$

1.4. **Pavage.** On considère un triangle équilatéral de côté n, subdivisé en petits triangles équilatéraux unitaires, comme illustré à gauche sur la figure 1. On distingue deux types de petits triangles : les "up", avec la pointe vers le haut, et les "down", avec la pointe vers le bas. On aimerait pouvoir paver le tout avec des losanges unitaires, présentés au centre sur la figure 1. Il est facile de voir qu'un tel pavage n'est pas possible : s'il en existait un, chaque losange couvrirait un "up" et un "down" ; cela impliquerait qu'il y a un même nombre de "up" que de "down" ; or, il y a $\binom{n+1}{2}$ "up" et $\binom{n}{2}$ "down".

Cependant, si on supprime $\binom{n+1}{2} - \binom{n}{2} = n$ triangles "up", il devient possible (ou non) d'y arriver. Par exemple, si on retire les 4 triangles "up" comme indiqué à droite sur la figure 1, il existe un pavage du reste avec 6 losanges unitaires.

Un ensemble de n triangles "up" dont la suppression permet un pavage du reste avec $\binom{n}{2}$ losanges unitaires est dit *sympa*.

Question 11. *Démontrer qu'il existe toujours au moins un ensemble sympa. (Indication : construire un pavage particulier.)*

Question 12. *Montrer que les ensembles sympas forment les bases d'un matroïde ; plus précisément, qu'ils forment les bases du dual d'un certain matroïde transversal.*