Colloquium du CERMICS

École des Ponts
ParisTech

Symétries émergentes en physique statistique planaire

Hugo Duminil-Copin

Université de Genève et IHES

10 mars 2022

Symétries émergentes en physique statistique planaire

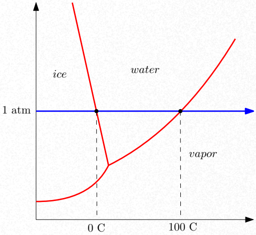
Hugo Duminil-Copin, Université de Genève et IHES

2021

Définition Une transition de phase est un changement de comportment drastique d'un système physique lorsque ses paramètres sont changés continuement.

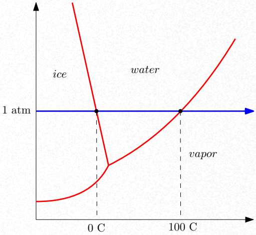
Définition Une transition de phase est un changement de comportment drastique d'un système physique lorsque ses paramètres sont changés continuement.

Eau

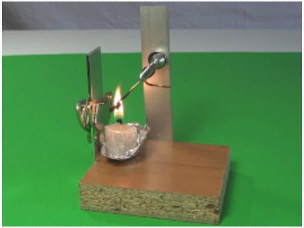


Définition Une transition de phase est un changement de comportment drastique d'un système physique lorsque ses paramètres sont changés continuement.

Eau



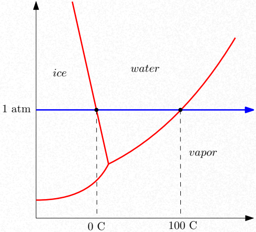
Férromagnetisme



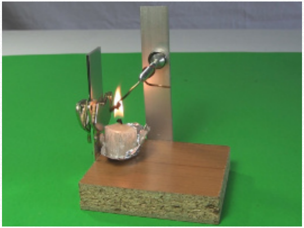
Comprendre les transitions de phase continues

Définition Une transition de phase est un changement de comportment drastique d'un système physique lorsque ses paramètres sont changés continuement.

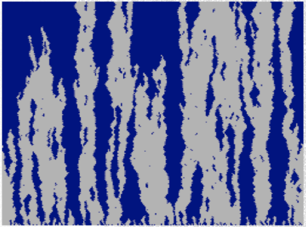
Eau



Férromagnetisme



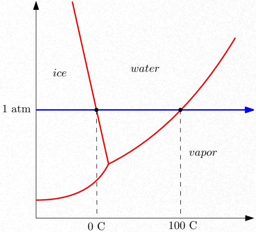
Porosité



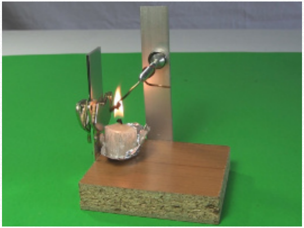
Comprendre les transitions de phase continues

Définition Une transition de phase est un changement de comportment drastique d'un système physique lorsque ses paramètres sont changés continuement.

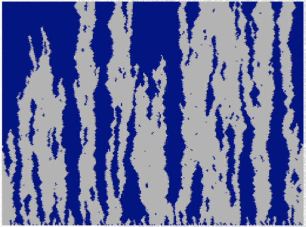
Eau



Férromagnetisme



Porosité

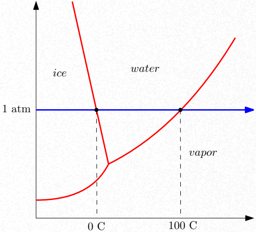


Il y a deux types de transitions de phases: continues et discontinues.

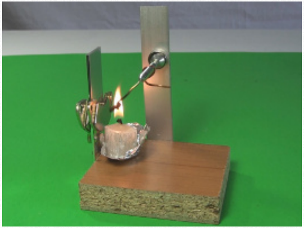
Comprendre les transitions de phase continues

Définition Une transition de phase est un changement de comportment drastique d'un système physique lorsque ses paramètres sont changés continuement.

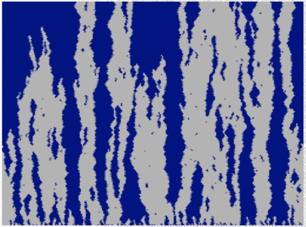
Eau



Férromagnetisme



Porosité



Il y a deux types de transitions de phases: continues et discontinues.

But Comprendre le comportement de systèmes physiques lorsqu'ils traversent une transition de phase.

L'exemple de la porosité

PERCOLATION PROCESSES

I. CRYSTALS AND MAZES

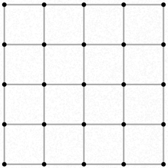
By S. R. BROADBENT and J. M. HAMMERSLEY

Received 15 August 1956

ABSTRACT. The paper studies, in a general way, how the random properties of a 'medium' influence the percolation of a 'fluid' through it. The treatment differs from conventional diffusion theory, in which it is the random properties of the fluid that matter. Fluid and medium bear general interpretations: for example, solute diffusing through solvent, electrons migrating over an atomic lattice, molecules penetrating a porous solid, disease infecting a community, etc.

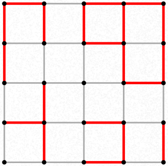
3. *Random mazes*. 3·1. Suppose that in an infinite set of atoms joined by bonds some (or all) of the bonds are *dammed* in a random manner. Fluid is supplied to a (finite, countable or uncountable) subset of atoms called *source atoms*, and then percolates the set in the following way. An atom of the set is said to be *wet* by the fluid either if it is a source atom or if there exists a walk to the atom from a source atom, the walk traversing undammed bonds only and in the permitted directions. All atoms not wet are said to be *dry*. We are interested in the properties of the wet atoms, and these naturally depend on the structure and connexions of the given set, on the manner in which bonds are dammed, and on the source atoms.

Percolation



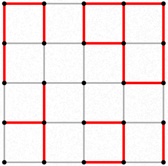
La percolation est un modèle de sous-graphe aléatoire $\omega = (V_\omega, E_\omega)$ d'un graphe (non-orienté) $G = (V_G, E_G)$ avec $V_\omega = V_G$ et $E_\omega \subset E_G$.

Percolation



La percolation est un modèle de sous-graphe aléatoire $\omega = (V_\omega, E_\omega)$ d'un graphe (non-orienté) $G = (V_G, E_G)$ avec $V_\omega = V_G$ et $E_\omega \subset E_G$.

Percolation

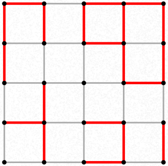


La percolation est un modèle de sous-graphe aléatoire $\omega = (V_\omega, E_\omega)$ d'un graphe (non-orienté) $G = (V_G, E_G)$ avec $V_\omega = V_G$ et $E_\omega \subset E_G$.

Exemple typique (Percolation de Bernoulli)

Les arêtes de E_G sont dans E_ω avec probabilité p indépendamment.

Percolation

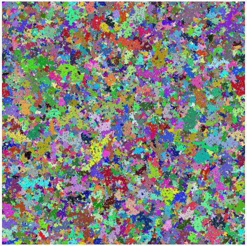


La percolation est un modèle de sous-graphe aléatoire $\omega = (V_\omega, E_\omega)$ d'un graphe (non-orienté) $G = (V_G, E_G)$ avec $V_\omega = V_G$ et $E_\omega \subset E_G$.

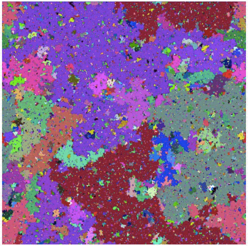
Exemple typique (Percolation de Bernoulli)

Les arêtes de E_G sont dans E_ω avec probabilité p indépendamment.

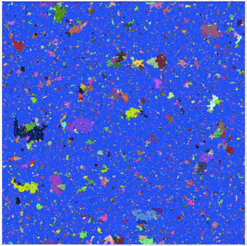
$p < 0.5$



$p = 0.5$



$p > 0.5$



Pour aller plus loin?

Il y a de nombreux modèles de percolation exhibant habituellement des dépendances à longue distance.

Pour aller plus loin?

Il y a de nombreux modèles de percolation exhibant habituellement des dépendances à longue distance.

- Percolation de FK (Fortuin-Kasteleyn, 1970)

$$\mathbb{P}_p(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} p^{|E_\omega|}(1-p)^{|E_G|-|E_\omega|}$$

Pour aller plus loin?

Il y a de nombreux modèles de percolation exhibant habituellement des dépendances à longue distance.

- Percolation de FK (Fortuin-Kasteleyn, 1970)

$$\mathbb{P}_{G,p,q}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} p^{|E_\omega|}(1-p)^{|E_G|-|E_\omega|}q^{\#\text{composantes connexes dans }\omega}.$$

Pour aller plus loin?

Il y a de nombreux modèles de percolation exhibant habituellement des dépendances à longue distance.

- Percolation de FK (Fortuin-Kasteleyn, 1970)

$$\mathbb{P}_{G,p,q}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{Z_{G,p,q}} \cdot p^{|E_\omega|}(1-p)^{|E_G|-|E_\omega|} q^{\#\text{composantes connexes dans } \omega}.$$

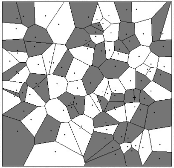
Pour aller plus loin?

Il y a de nombreux modèles de percolation exhibant habituellement des dépendances à longue distance.

- Percolation de FK (Fortuin-Kasteleyn, 1970)

$$\mathbb{P}_{G,p,q}(\omega) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{Z_{G,p,q}} \cdot p^{|E_\omega|}(1-p)^{|E_G|-|E_\omega|} q^{\#\text{composantes connexes dans } \omega}.$$

- Modèles de percolation continue (Voronoi, Booléenne)



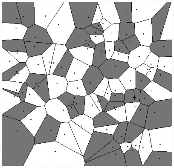
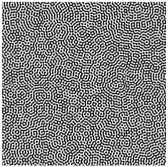
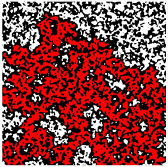
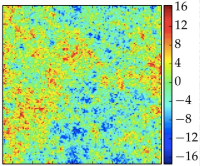
Pour aller plus loin?

Il y a de nombreux modèles de percolation exhibant habituellement des dépendances à longue distance.

- Percolation de FK (Fortuin-Kasteleyn, 1970)

$$\mathbb{P}_{G,p,q}(\omega) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{Z_{G,p,q}} \cdot p^{|E_\omega|}(1-p)^{|E_G|-|E_\omega|} q^{\#\text{composantes connexes dans } \omega}.$$

- Modèles de percolation continue (Voronoi, Booléenne)
- $\{x : \varphi_x \geq h\}$ pour certains fonctions continues telles que les polynômes aléatoires homogènes, les sommes aléatoires de fonctions propres du Laplacien, ou le champs libre gaussien.

Transition de phase pour les modèles de percolation

Considérons la percolation FK sur le réseau carré $\mathbb{Z}^2$.

Transition de phase pour les modèles de percolation

Considérons la percolation FK sur le réseau carré $\mathbb{Z}^2$.

Proposition

Il existe $p_c = p_c(\mathbb{Z}^2, q) \in (0, 1)$ *tel que*

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2,p,q}[0 \textit{ est dans une composante connexe infinie}] = \begin{cases} 0 & \textit{si } p < p_c, \\ \theta(p,q) > 0 & \textit{si } p > p_c. \end{cases}$$

Considérons la percolation FK sur le réseau carré $\mathbb{Z}^2$.

Proposition

Il existe $p_c = p_c(\mathbb{Z}^2, q) \in (0,1)$ *tel que*

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2,p,q}[0 \textit{ est dans une composante connexe infinie}] = \begin{cases} 0 & \textit{si } p < p_c, \\ \theta(p,q) > 0 & \textit{si } p > p_c. \end{cases}$$

Questions.

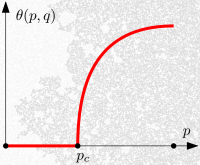
- Que vaut p_c?

Considérons la percolation FK sur le réseau carré $\mathbb{Z}^2$.

Proposition

Il existe $p_c = p_c(\mathbb{Z}^2, q) \in (0,1)$ *tel que*

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2,p,q}[0 \textit{ est dans une composante connexe infinie}] = \begin{cases} 0 & \textit{si } p < p_c, \\ \theta(p,q) > 0 & \textit{si } p > p_c. \end{cases}$$



Questions.

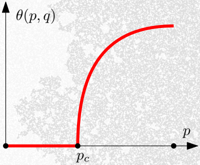
- Que vaut p_c?
- Comment $\theta(p,q)$ se comporte lorsque $p \searrow p_c$?

Considérons la percolation FK sur le réseau carré $\mathbb{Z}^2$.

Proposition

Il existe $p_c = p_c(\mathbb{Z}^2, q) \in (0,1)$ tel que

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2,p,q}[0 \textit{ est dans une composante connexe infinie}] = \begin{cases} 0 & \textit{si } p < p_c, \\ \theta(p,q) > 0 & \textit{si } p > p_c. \end{cases}$$



Questions.

- Que vaut p_c?
- Comment $\theta(p,q)$ se comporte lorsque $p \searrow p_c$?

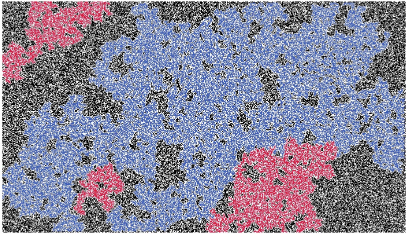
Conjecture

Lorsque la transition de phase est continue, il existe $\alpha(q) > 0$, appelé exposant critique, tel que

$$\theta(p,q) = (p - p_c)_+^{\alpha(q)+o(1)}.$$

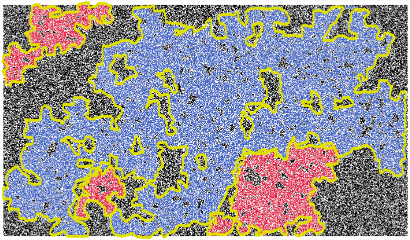
Limite d'échelle

Considérons un configuration de percolation ω^δ sur une version renormalisée du graphe par un facteur $\delta > 0$ (par exemple $\delta\mathbb{Z}^2$).



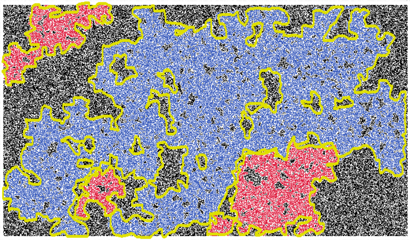
Limite d'échelle

Considérons un configuration de percolation ω^δ sur une version renormalisée du graphe par un facteur $\delta > 0$ (par exemple $\delta\mathbb{Z}^2$).



Famille de boucles correspondant aux bords des comp. connexes.

Considérons un configuration de percolation ω^δ sur une version renormalisée du graphe par un facteur $\delta > 0$ (par exemple $\delta\mathbb{Z}^2$).



Famille de boucles correspondant aux bords des comp. connexes.

Définition (Distance entre deux familles de boucles)

Pour deux familles de boucles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, $d(\mathcal{F},\mathcal{F}') \leq \varepsilon$ si $\forall \gamma \in \mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) de rayon au moins ε, $\exists \gamma' \in \mathcal{F}'$ (resp. $\mathcal{F}$) pouvant être paramétrée par $\mathbb{S}^1$ de telle sorte que

$$\max_{t\in\mathbb{S}^1} |\gamma(t) - \gamma'(t)| \leq \varepsilon$$

Conjecture (Existence d'une limite d'échelle)

Lorsque $p = p_c$, ω^δ converge en loi lorsque δ tend vers 0 vers une collection aléatoire de boucles ω^{cont}.

Conjecture (Existence d'une limite d'échelle)

Lorsque $p = p_c$, ω^δ converge en loi lorsque δ tend vers 0 vers une collection aléatoire de boucles ω^{cont}.

Proposition (Invariance par translation et homothétie)

Si la variable aléatoire ω^{cont} est bien définie, alors

- $\omega^{\mathrm{cont}} \overset{\mathrm{loi}}{=} \lambda\,\omega^{\mathrm{cont}}$ *pour tout* $\lambda > 0$;
- $\omega^{\mathrm{cont}} \overset{\mathrm{loi}}{=} \tau_x\,\omega^{\mathrm{cont}}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^2$, *où* τ_x *est la translation par* x.

Conjecture (Existence d'une limite d'échelle)

Lorsque $p = p_c$, ω^δ converge en loi lorsque δ tend vers 0 vers une collection aléatoire de boucles $\omega^{\rm cont}$.

Proposition (Invariance par translation et homothétie)

Si la variable aléatoire $\omega^{\rm cont}$ est bien définie, alors

- $\omega^{\rm cont} \overset{\rm loi}{=} \lambda\,\omega^{\rm cont}$ *pour tout* $\lambda > 0$;
- $\omega^{\rm cont} \overset{\rm loi}{=} \tau_x\,\omega^{\rm cont}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^2$, *où* τ_x *est la translation par* x.

Proof Par définition,

$$\omega^{\lambda\delta} \overset{\rm law}{=} \lambda\omega^\delta.$$

En prenant la limite d'échelle et utilisant que $\omega^{\lambda\delta}$ et ω^δ converge vers $\omega^{\rm cont}$, ce qui implique la limit par homothétie.

Conjecture (Existence d'une limite d'échelle)

Lorsque $p = p_c$, ω^δ converge en loi lorsque δ tend vers 0 vers une collection aléatoire de boucles ω^{cont}.

Proposition (Invariance par translation et homothétie)

Si la variable aléatoire ω^{cont} est bien définie, alors

- $\omega^{\mathrm{cont}} \overset{\mathrm{loi}}{=} \lambda\,\omega^{\mathrm{cont}}$ *pour tout $\lambda > 0$;*
- $\omega^{\mathrm{cont}} \overset{\mathrm{loi}}{=} \tau_x\,\omega^{\mathrm{cont}}$ *pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, où τ_x est la translation par x.*

Proof Par définition,

$$\omega^{\lambda\delta} \overset{\mathrm{law}}{=} \lambda\omega^{\delta}.$$

En prenant la limite d'échelle et utilisant que $\omega^{\lambda\delta}$ et ω^δ converge vers ω^{cont}, ce qui implique la limit par homothétie.

Pour $x \in \mathbb{R}^2$, il existe $\delta > 0$ tel que $x \in \delta\mathbb{Z}^2$. Alors,

$$\omega^{\delta/2^n} \overset{\mathrm{law}}{=} \tau_x\omega^{\delta/2^n}$$

puisque $x \in 2^{-n}\delta\mathbb{Z}^2$. En prenant n vers l'infini et en utilisant que $\omega^{\delta/2^n}$ converge vers ω^{cont}, on obtient l'invariance par translation.
$\square$

Conjecture (Invariance par rotation de la limite d'échelle)

La variable aléatoire ω^{cont} satisfait:

- $\omega^{\mathrm{cont}} \stackrel{\mathrm{loi}}{=} \rho_\alpha \, \omega^{\mathrm{cont}}$ *pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, où ρ_α iest la rotation autour de l'origine, d'angle α.*

Conjecture (Invariance par rotation de la limite d'échelle)

La variable aléatoire ω^{cont} *satisfait:*

- $\omega^{\mathrm{cont}} \overset{\mathrm{loi}}{=} \rho_\alpha \, \omega^{\mathrm{cont}}$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *où* ρ_α *iest la rotation autour de l'origine, d'angle* α.

Alors que l'invariance par rotation par un angle dans $\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ est évidente, le cas général est beaucoup plus mystérieux.

Conjecture (Invariance par rotation de la limite d'échelle)

La variable aléatoire ω^{cont} *satisfait:*

- $\omega^{\mathrm{cont}} \overset{\mathrm{loi}}{=} \rho_\alpha\, \omega^{\mathrm{cont}}$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$*, où* ρ_α *iest la rotation autour de l'origine, d'angle* α*.*

Conjecture (Universalité)

La limite ω^{cont} *est indépendante du réseau sur lequel la percolation est définie.*

Conjecture (Invariance par rotation de la limite d'échelle)

La variable aléatoire ω^{cont} *satisfait:*

- $\omega^{\mathrm{cont}} \stackrel{\mathrm{loi}}{=} \rho_\alpha\, \omega^{\mathrm{cont}}$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$*, où* ρ_α *iest la rotation autour de l'origine, d'angle* α*.*

Conjecture (Universalité)

La limite ω^{cont} *est indépendante du réseau sur lequel la percolation est définie.*

Proof Par universalité, la limite d'échelle de $\rho_\alpha \mathbb{Z}^2$ est ω^{cont}, mais également $\rho_\alpha \omega^{\mathrm{cont}}$.
□

Conjecture (Invariance par rotation de la limite d'échelle)

La variable aléatoire ω^{cont} *satisfait:*

- $\omega^{\mathrm{cont}} \overset{\mathrm{loi}}{=} \rho_\alpha\, \omega^{\mathrm{cont}}$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$*, où* ρ_α *iest la rotation autour de l'origine, d'angle* α*.*

Conjecture (Universalité)

La limite ω^{cont} *est indépendante du réseau sur lequel la percolation est définie.*

Proof Par universalité, la limite d'échelle de $\rho_\alpha \mathbb{Z}^2$ est ω^{cont}, mais également $\rho_\alpha \omega^{\mathrm{cont}}$.
□

L'intuition derrière la conjecture d'universalité vient d'un point de vue "système dynamique" appelé Groupe de Renormalization (RG):

- Multiplier par $\lambda \in (0,1)$ correspond à l'application de T_λ dans l'espace des modèles.
- ω^{cont} est donc un point fixe de toutes les applications T_λ avec $\lambda \in (0,1)$.
- Unicité du point fixe donne l'universalité.

Conjecture (Invariance conforme)

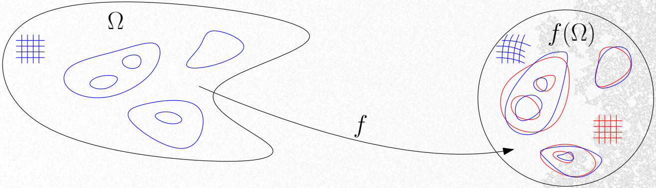
La variable aléatoire ω^{cont} *satisfait*

- $\omega^{\mathrm{cont}}_{|f(\Omega)} \overset{\mathrm{loi}}{=} f(\omega^{\mathrm{cont}}_{|\Omega})$ *pour toute application conforme* $f : \Omega \longleftrightarrow f(\Omega)$.

Conjecture (Invariance conforme)

La variable aléatoire ω^{cont} *satisfait*

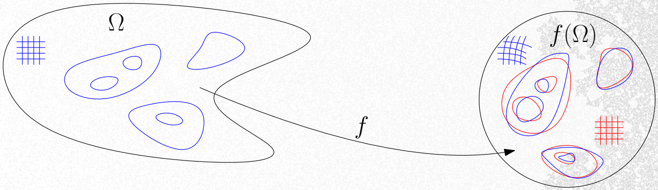
- $\omega^{\text{cont}}_{|f(\Omega)} \overset{\text{loi}}{=} f(\omega^{\text{cont}}_{|\Omega})$ *pour toute application conforme* $f : \Omega \longleftrightarrow f(\Omega)$.



Conjecture (Invariance conforme)

La variable aléatoire ω^{cont} satisfait

- $\omega^{\mathrm{cont}}_{|f(\Omega)} \overset{\mathrm{loi}}{=} f(\omega^{\mathrm{cont}}_{|\Omega})$ *pour toute application conforme* $f : \Omega \longleftrightarrow f(\Omega)$.



" *Lorsque l'invariance conforme est prouvée, les probabilistes sont au nirvana'*

En particulier, l'object ω^{cont} peut être décrit très précisément:

- la limite d'échelle est le Conformal Loop Ensemble de paramètre 6 (Schramm, Sheffield, Werner).
- On peut montrer que $\alpha(1) = 5/36$.

Quand l'invariance conforme est-elle prouvée?

- Dimères (Kenyon);
- Percolation de BErnoulli apr site sur le réseau triangulaire (Smirnov);
- modèle d'Ising (Smirnov, Chelkak-Smirnov);
- Champs libre gaussien discret (Schramm-Sheffield).

Quand l'invariance conforme est-elle prouvée?

- Dimères (Kenyon);
- Percolation de BErnoulli apr site sur le réseau triangulaire (Smirnov);
- modèle d'Ising (Smirnov, Chelkak-Smirnov);
- Champs libre gaussien discret (Schramm-Sheffield).

Comment obtenir plus de modèles: une stratégie en trois étapes:

Quand l’invariance conforme est-elle prouvée?

- Dimères (Kenyon);
- Percolation de BErnoulli apr site sur le réseau triangulaire (Smirnov);
- modèle d’Ising (Smirnov, Chelkak-Smirnov);
- Champs libre gaussien discret (Schramm-Sheffield).

Comment obtenir plus de modèles: une stratégie en trois étapes:

“ *Prouver que la limite déchelle existe*”

Quand l'invariance conforme est-elle prouvée?

- Dimères (Kenyon);
- Percolation de BErnoulli apr site sur le réseau triangulaire (Smirnov);
- modèle d'Ising (Smirnov, Chelkak-Smirnov);
- Champs libre gaussien discret (Schramm-Sheffield).

Comment obtenir plus de modèles: une stratégie en trois étapes:

" *Prouver que la limite déchelle existe"*

" *Prouver que la limite d'échelle est invariante par rotation"*

Vers l'invariance conforme

Quand l'invariance conforme est-elle prouvée?

- Dimères (Kenyon);
- Percolation de BErnoulli apr site sur le réseau triangulaire (Smirnov);
- modèle d'Ising (Smirnov, Chelkak-Smirnov);
- Champs libre gaussien discret (Schramm-Sheffield).

Comment obtenir plus de modèles: une stratégie en trois étapes:

“ *Prouver que la limite déchelle existe”*

“ *Prouver que la limite d'échelle est invariante par rotation”*

“ *Prouver que l'invariance par rotation+translation+homothétie implique l'invariance conforme”*

Quelques éléments de réponses (cas de la percolation de Bernoulli)

Théorème (Kesten, 1980)

Le point critique de la percolation de Bernoulli sur $\mathbb{Z}^2$ est $p_c = \frac{1}{2}$.

Théorème (Kesten, 1980)

Le point critique de la percolation de Bernoulli sur $\mathbb{Z}^2$ est $p_c = \frac{1}{2}$.

Définissons la distance $\mathbf{d}$ entre deux mesures de percolation $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}'$ comme suit $\mathbf{d}(\mathbb{P}, \mathbb{P}') \leq \varepsilon$ s'il existe un couplage $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ entre $\mathcal{F} \sim \mathbb{P}$ et $\mathcal{F}' \sim \mathbb{P}'$ tel qu'avec probabilité $1 - \varepsilon$, $d(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \leq \varepsilon$.

Quelques éléments de réponses (cas de la percolation de Bernoulli)

Théorème (Kesten, 1980)

Le point critique de la percolation de Bernoulli sur $\mathbb{Z}^2$ est $p_c = \frac{1}{2}$.

Définissons la distance $\mathbf{d}$ entre deux mesures de percolation $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}'$ comme suit $\mathbf{d}(\mathbb{P}, \mathbb{P}') \leq \varepsilon$ s'il existe un couplage $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ entre $\mathcal{F} \sim \mathbb{P}$ et $\mathcal{F}' \sim \mathbb{P}'$ tel qu'avec probabilité $1 - \varepsilon$, $d(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \leq \varepsilon$.

Théorème (D.-C., Kozlowski, Krachun, Manolescu, Oulamara)

Il existe $c, C > 0$ tels que pour tout $\delta > 0$ et $\alpha \in (0, \pi)$,

$$\mathbf{d}\big(\mathbb{P}_{\delta\mathbb{Z}^2}, \mathbb{P}_{\rho_\alpha \delta\mathbb{Z}^2}\big) \leq C\delta^c,$$

où $\mathbb{P}_{\delta\mathbb{Z}^2}$ et $\mathbb{P}_{\rho_\alpha \delta\mathbb{Z}^2}$ sont les mesures de percolation critique sur $\delta\mathbb{Z}^2$ et $\rho_\alpha \delta\mathbb{Z}^2$ respectivement.

Quelques éléments de réponses (cas de la percolation de Bernoulli)

Théorème (Kesten, 1980)

Le point critique de la percolation de Bernoulli sur $\mathbb{Z}^2$ est $p_c = \frac{1}{2}$.

Définissons la distance **d** entre deux mesures de percolation $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}'$ comme suit $\mathbf{d}(\mathbb{P}, \mathbb{P}') \leq \varepsilon$ s'il existe un couplage $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ entre $\mathcal{F} \sim \mathbb{P}$ et $\mathcal{F}' \sim \mathbb{P}'$ tel qu'avec probabilité $1 - \varepsilon$, $d(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \leq \varepsilon$.

Théorème (D.-C., Kozlowski, Krachun, Manolescu, Oulamara)

Il existe $c, C > 0$ tels que pour tout $\delta > 0$ et $\alpha \in (0, \pi)$,

$$\mathbf{d}\left(\mathbb{P}_{\delta\mathbb{Z}^2}, \mathbb{P}_{\rho_\alpha \delta\mathbb{Z}^2}\right) \leq C\delta^c,$$

où $\mathbb{P}_{\delta\mathbb{Z}^2}$ et $\mathbb{P}_{\rho_\alpha \delta\mathbb{Z}^2}$ sont les mesures de percolation critique sur $\delta\mathbb{Z}^2$ et $\rho_\alpha \delta\mathbb{Z}^2$ respectivement.

" *Toute sous-suite extraite $\mathbb{P}_{\delta_n\mathbb{Z}^2}$ convergente est invariante par rotation."*

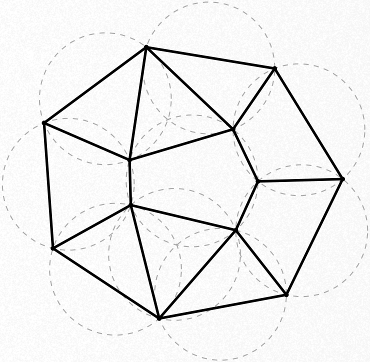
Un principe d'universalité

Considérons une famille de mesures de percolation de Bernoulli $\mathbb{P}_{\mathbb{G}}$

Un principe d'universalité

Considérons une famille de mesures de percolation de Bernoulli $\mathbb{P}_{\mathbb{G}}$

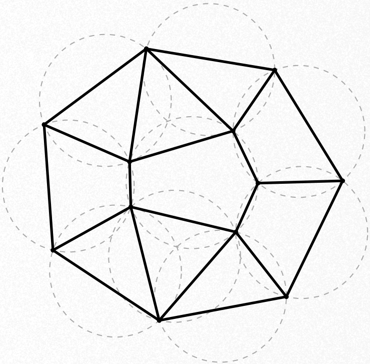
- sur un graphe isoradial $\mathbb{G}$, c'est-à-dire un graphe dont toutes les faces sont inscrites dans des cercles de rayon 1;



Un principe d'universalité

Considérons une famille de mesures de percolation de Bernoulli $\mathbb{P}_{\mathbb{G}}$

- sur un graphe isoradial $\mathbb{G}$, c'est-à-dire un graphe dont toutes les faces sont inscrites dans des cercles de rayon 1;
- avec des poids isoradiaux, i.e. que chaque arête e dans $\mathbb{G}$ a un paramètre p_e naturellement associé (ignorons la valeur précise de ce paramètre).



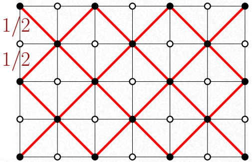
Un principe d'universalité

Considérons une famille de mesures de percolation de Bernoulli $\mathbb{P}_{\mathbb{G}}$

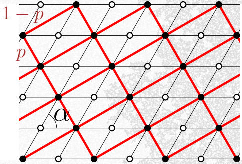
- sur un graphe isoradial $\mathbb{G}$, c'est-à-dire un graphe dont toutes les faces sont inscrites dans des cercles de rayon 1;
- avec des poids isoradiaux, i.e. que chaque arête e dans $\mathbb{G}$ a un paramètre p_e naturellement associé (ignorons la valeur précise de ce paramètre).

Cas particuliers: réseau carré et les réseaux rectangulaires.

$\mathbb{L}_{\pi/2}$
$\downarrow$
$\phi_{\mathbb{L}_{\pi/2}}$



$\mathbb{L}_{\alpha}$
$\downarrow$
$\phi_{\mathbb{L}_{\alpha}}$



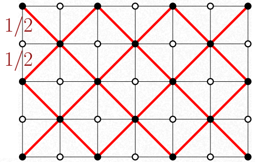
Un principe d'universalité

Considérons une famille de mesures de percolation de Bernoulli $\mathbb{P}_{\mathbb{G}}$

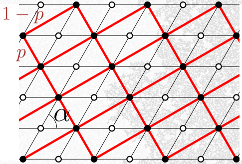
- sur un graphe isoradial $\mathbb{G}$, c'est-à-dire un graphe dont toutes les faces sont inscrites dans des cercles de rayon 1;
- avec des poids isoradiaux, i.e. que chaque arête e dans $\mathbb{G}$ a un paramètre p_e naturellement associé (ignorons la valeur précise de ce paramètre).

Cas particuliers: réseau carré et les réseaux rectangulaires.

$\mathbb{L}_{\pi/2}$
$\downarrow$
$\phi_{\mathbb{L}_{\pi/2}}$



$\mathbb{L}_{\alpha}$
$\downarrow$
$\phi_{\mathbb{L}_{\alpha}}$

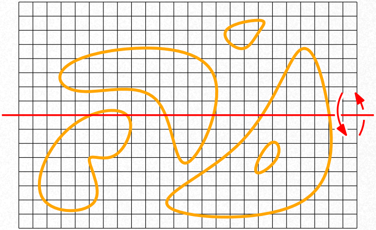


Theorem (D.-C., Kozlowski, Krachun, Manolescu, Oulamara '20)

There exist $C, c > 0$ such that for every $\delta > 0$ and $\alpha \in (0, \pi)$,

$$\mathbf{d}\big(\mathbb{P}_{\delta\mathbb{L}(\pi/2)}, \mathbb{P}_{\delta\mathbb{L}(\alpha)}\big) \leq C\delta^{c}.$$

De l'universalité vers l'invariance par rotation



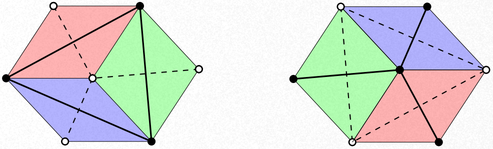
$\phi_{\mathbb{L}_{\pi/2}}$ est invariant par la réflection par rapport à $\mathbb{R}$

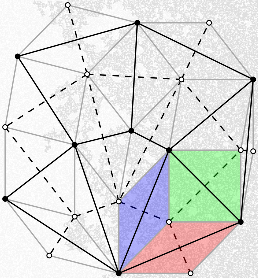
$\phi_{\mathbb{L}_\alpha}$ est invariant par la réflection σ_α par rapport à $e^{i\alpha/2}\mathbb{R}$

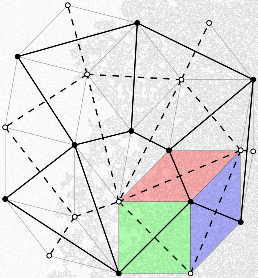
Le résultat d'universalit e implique que $\phi_{\mathbb{L}_{\pi/2}}$ est asymptotiquement invariant par $\sigma_\alpha \circ \sigma_0$, qui est simplement la rotation d'angle α.

Un lien entre les percolation de Bernoulli sur différents graphes isoradiaux

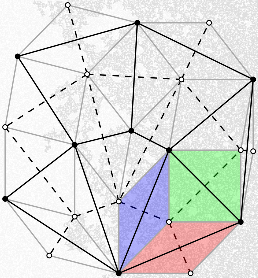
La transformation star-triangle



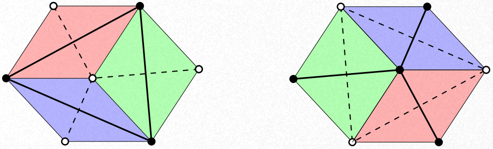




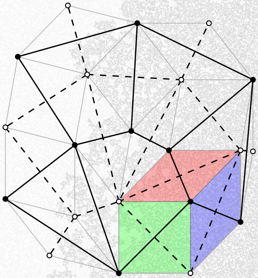
Un lien entre les percolation de Bernoulli sur différents graphes isoradiaux



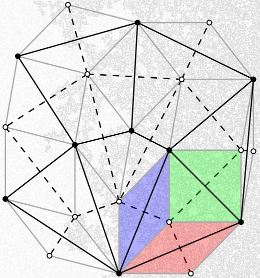
La transformation star-triangle



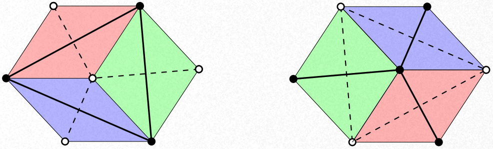
La loi est préservée lorsque l'on considère les poids isoradiaux.



Un lien entre les percolation de Bernoulli sur différents graphes isoradiaux

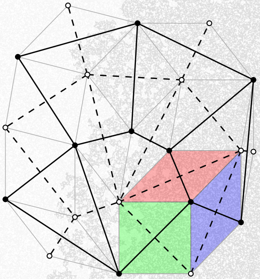


La transformation star-triangle

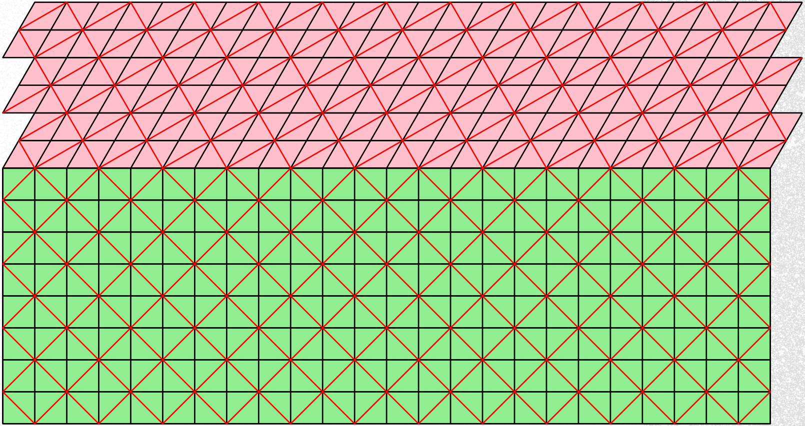


La loi est préservée lorsque l'on considère les poids isoradiaux.

Introduit par Baxter en 1978. La notion est reliée à la célèbre équation de Yang-Baxter que l'on retrouve dans l'étude des systèmes intégrables.

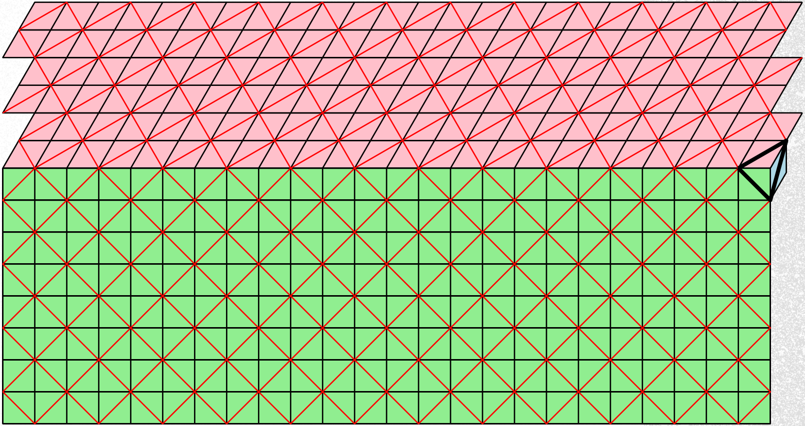


Idée fondamentale de la preuve



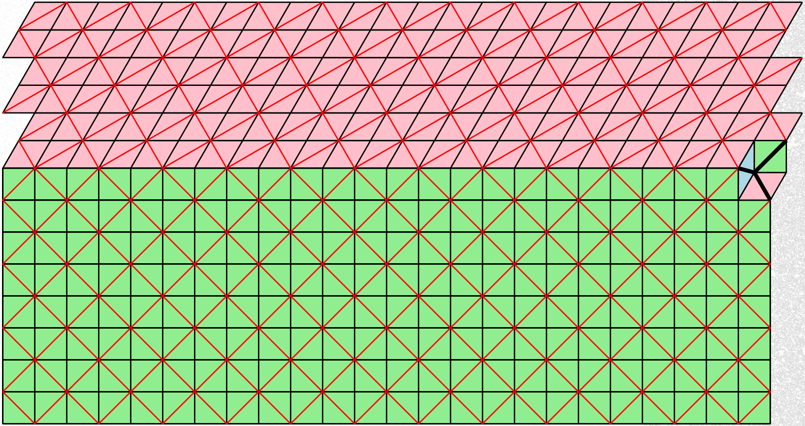
$\mathbb{L}^{(0)}$

Idée fondamentale de la preuve



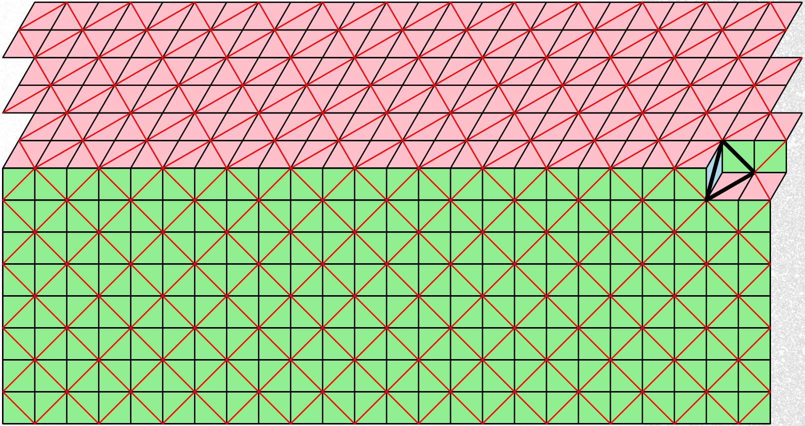
$\mathbb{L}^{(0)}$

Idée fondamentale de la preuve



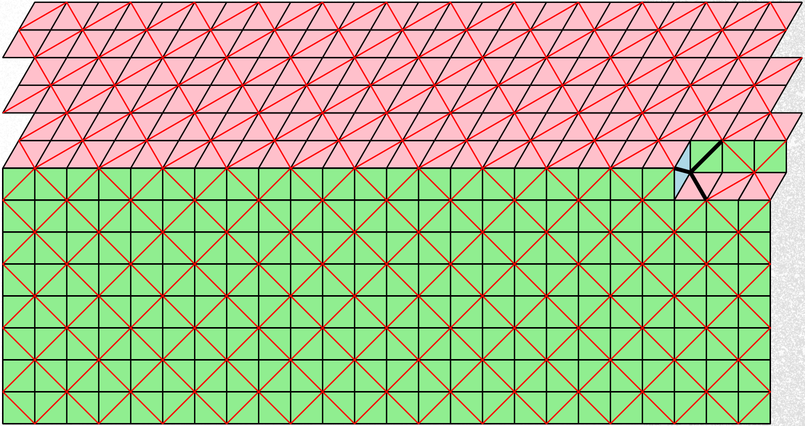
$\mathbb{L}^{(0)}$

Idée fondamentale de la preuve



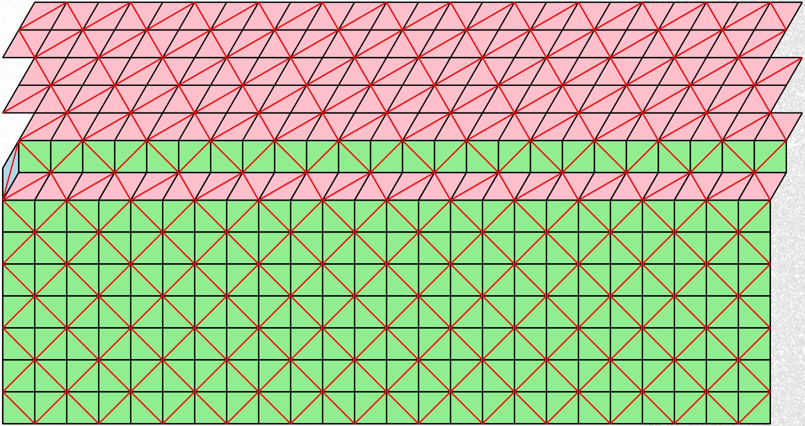
$\mathbb{L}^{(0)}$

Idée fondamentale de la preuve



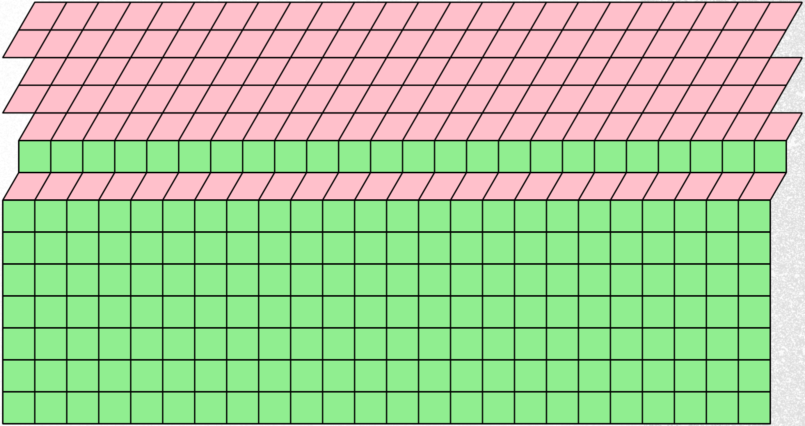
$\mathbb{L}^{(0)}$

Idée fondamentale de la preuve



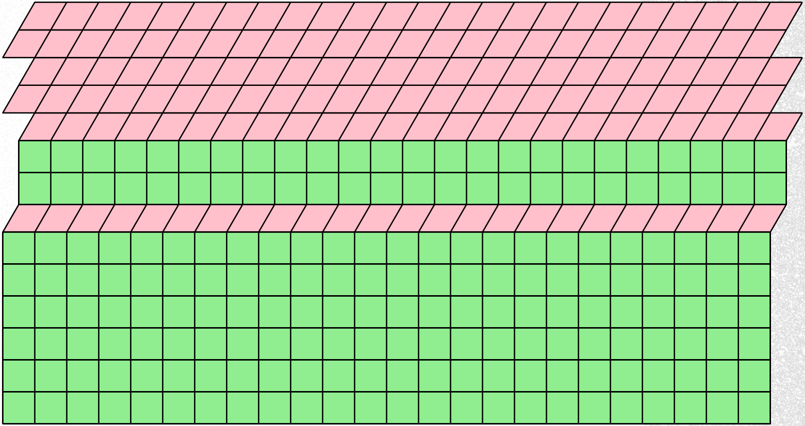
$\mathbb{L}^{(0)}$

Idée fondamentale de la preuve



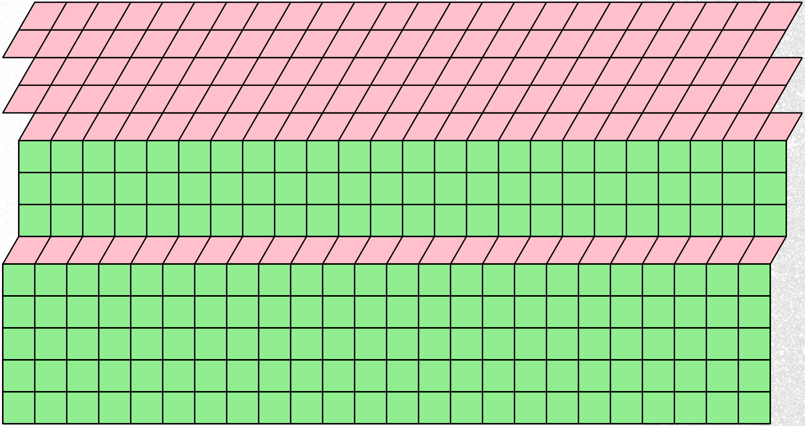
$\mathbb{L}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(1)}$

Idée fondamentale de la preuve



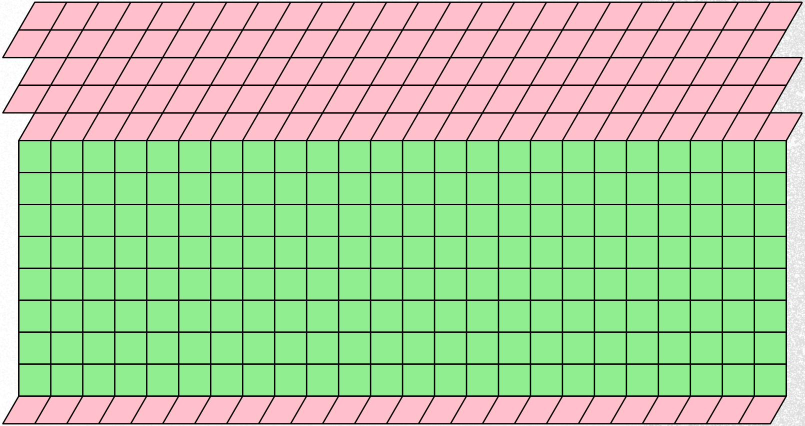
$\mathbb{L}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(2)}$

Idée fondamentale de la preuve



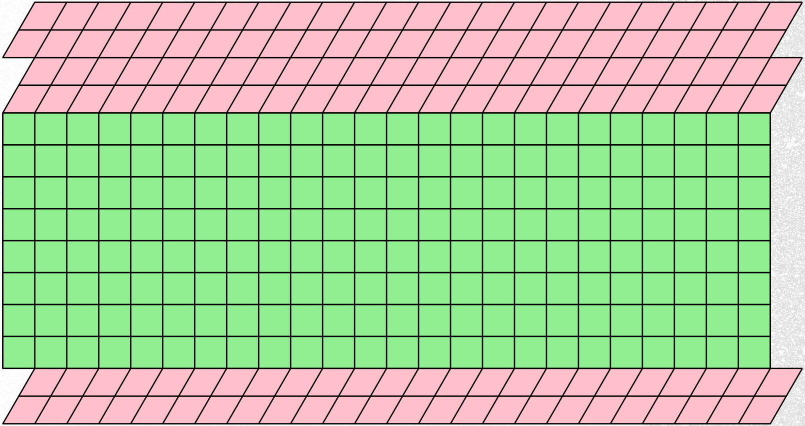
$\mathbb{L}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(2)}$

Idée fondamentale de la preuve



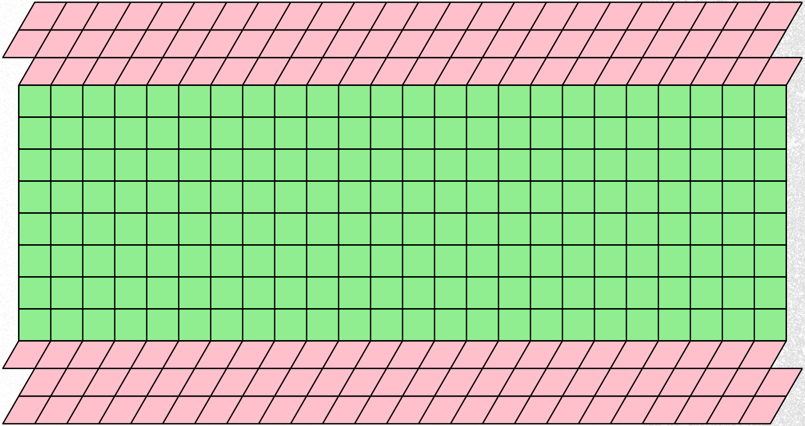
$\mathbb{L}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(2)} \dots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N)}$

Idée fondamentale de la preuve



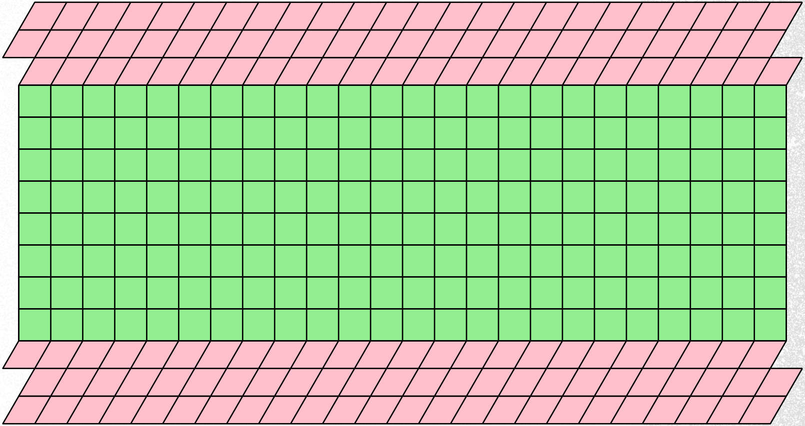
$$\mathbb{L}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(2)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(2N)}$$

Idée fondamentale de la preuve



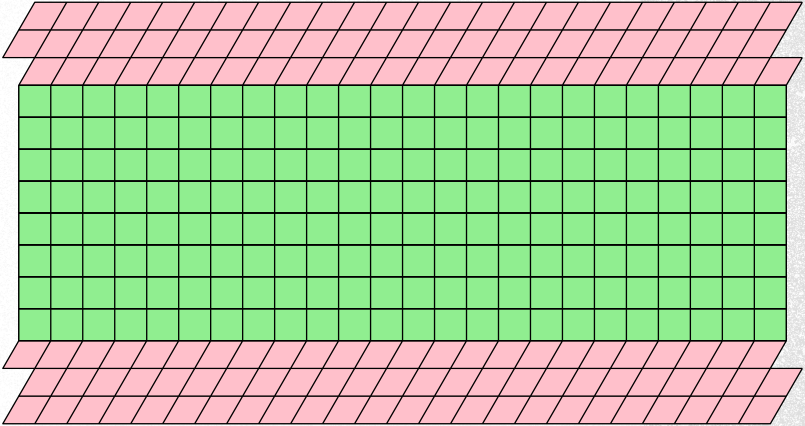
$$\mathbb{L}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(2)} \dots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N)} \dots \longrightarrow \mathbb{L}^{(2N)}$$

Idée fondamentale de la preuve



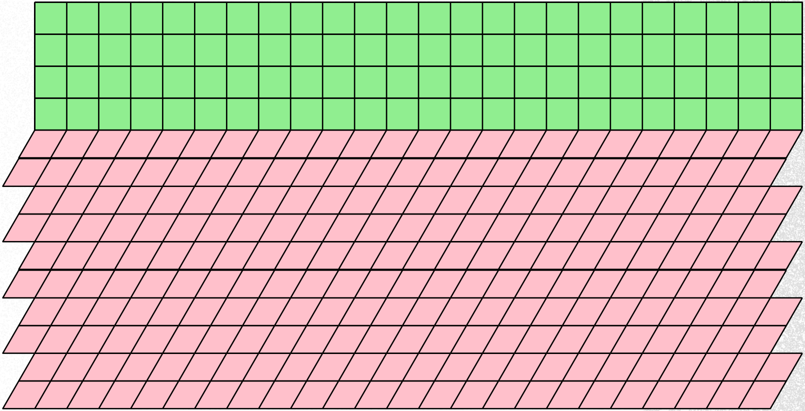
$$\mathbb{L}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(2)} \dots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N)} \dots \longrightarrow \mathbb{L}^{(2N)}$$

Idée fondamentale de la preuve



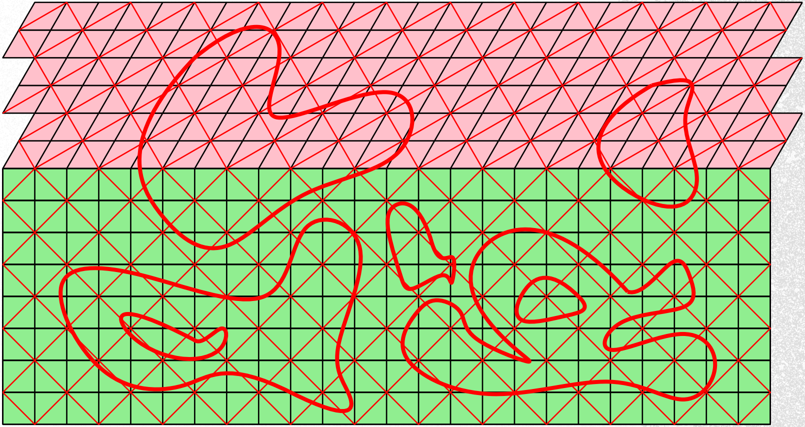
$$\mathbb{L}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(2)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(2N)}$$

Idée fondamentale de la preuve



$$\mathbb{L}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(2)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(2N)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N^2)}$$

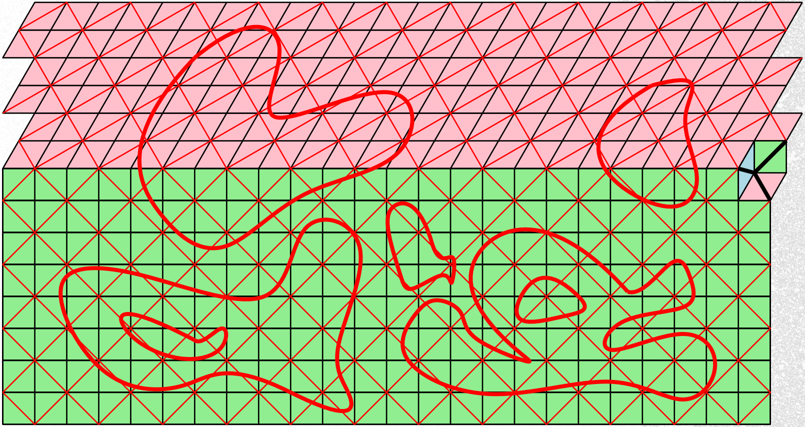
Idée fondamentale de la preuve



$\mathbb{L}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(2)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(2N)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N^2)}$

$\omega^{(0)}$

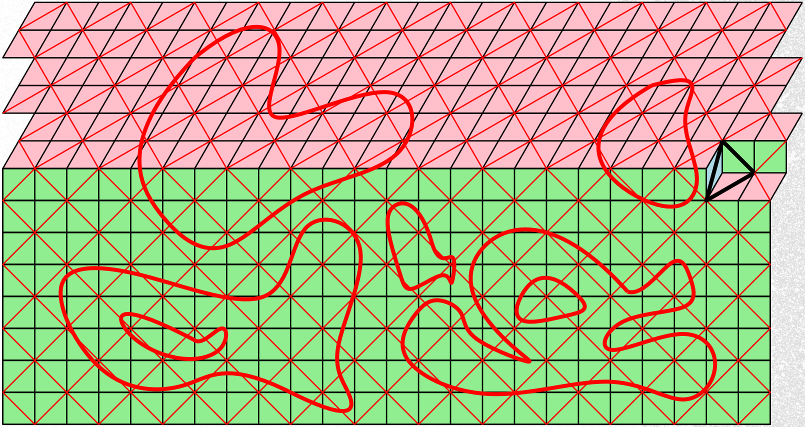
Idée fondamentale de la preuve



$\mathbb{L}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(2)} \ \dots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N)} \ \dots \longrightarrow \mathbb{L}^{(2N)} \ \dots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N^2)}$

$\omega^{(0)}$

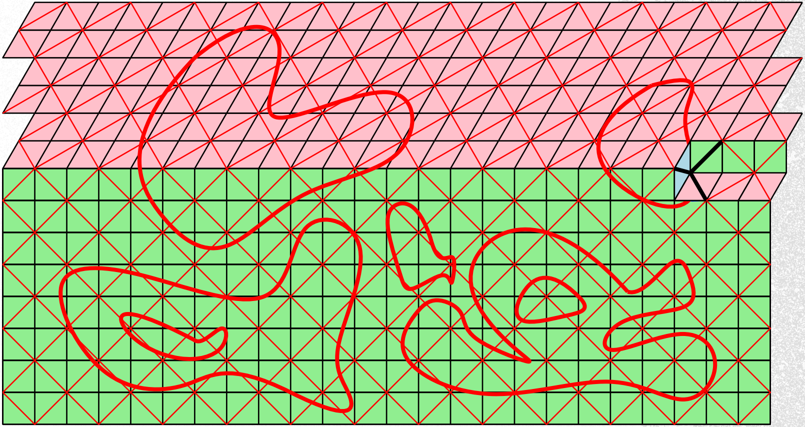
Idée fondamentale de la preuve



$$\mathbb{L}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(2)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(2N)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N^2)}$$

$\omega^{(0)}$

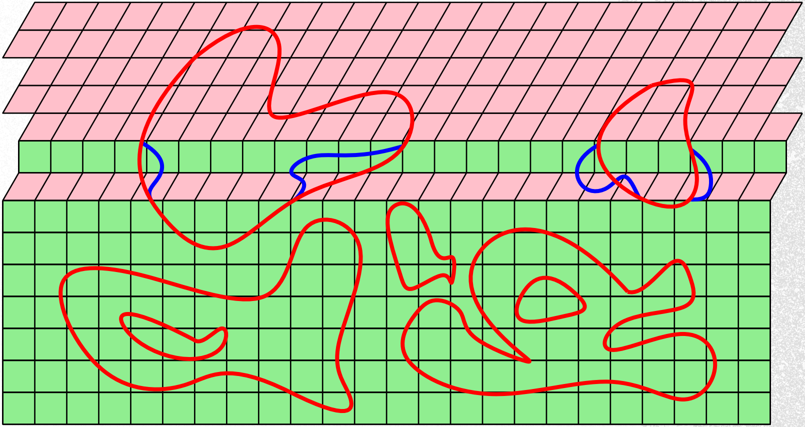
Idée fondamentale de la preuve



$$\mathbb{L}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(2)} \ \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N)} \ \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(2N)} \ \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N^2)}$$

$\omega^{(0)}$

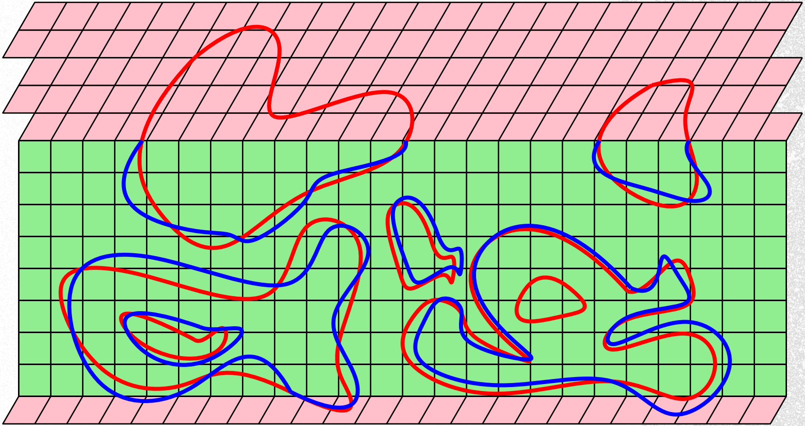
Idée fondamentale de la preuve



$$\mathbb{L}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(2)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(2N)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N^2)}$$

$$\omega^{(0)} \longrightarrow \omega^{(1)}$$

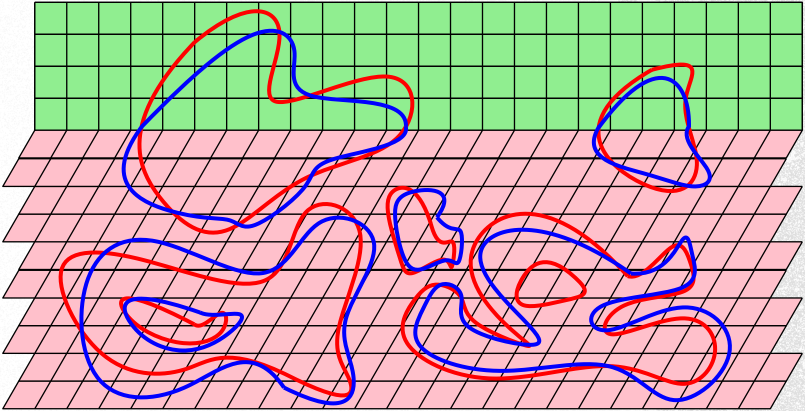
Idée fondamentale de la preuve



$$\mathbb{L}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(2)} \dots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N)} \dots \longrightarrow \mathbb{L}^{(2N)} \dots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N^2)}$$

$$\omega^{(0)} \longrightarrow \omega^{(1)} \longrightarrow \omega^{(2)} \dots \longrightarrow \omega^{(N)}$$

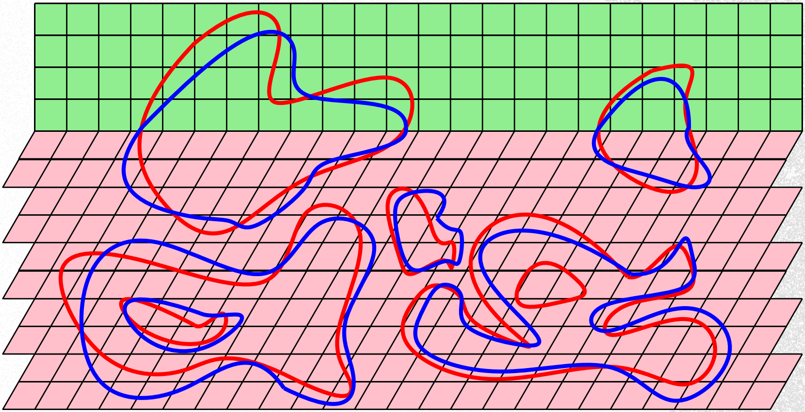
Idée fondamentale de la preuve



$$\mathbb{L}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(2)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(2N)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N^2)}$$

$$\omega^{(0)} \longrightarrow \omega^{(1)} \longrightarrow \omega^{(2)} \ldots \longrightarrow \omega^{(N)} \quad \ldots \quad \ldots \quad \longrightarrow \omega^{(N^2)}$$

Idée fondamentale de la preuve



$$\mathbb{L}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{L}^{(2)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(2N)} \ldots \longrightarrow \mathbb{L}^{(N^2)}$$
$$\omega^{(0)} \longrightarrow \omega^{(1)} \longrightarrow \omega^{(2)} \ldots \longrightarrow \omega^{(N)} \quad \ldots \quad \ldots \quad \longrightarrow \omega^{(N^2)}$$

changements centrés et i.i.d. $\Longrightarrow O(\sqrt{N})$ déplacement $\Longrightarrow$ universality

A more general result

Theorem (D.-C., Kozlowski, Krachun, Manolescu, Oulamara '20)
Fix $1 \leq q \leq 4$. There exist $c, C > 0$ such that for every $\delta > 0$ and $\alpha \in (0, \pi)$,

$$\mathbf{d}\big(\mathbb{P}_{\delta\mathbb{Z}^2}, \mathbb{P}_{\rho_\alpha\delta\mathbb{Z}^2}\big) \leq C\delta^c,$$

where $\mathbb{P}_{\delta\mathbb{Z}^2}$ and $\mathbb{P}_{\rho_\alpha\delta\mathbb{Z}^2}$ are the critical FK percolation measures on $\delta\mathbb{Z}^2$ and $\rho_\alpha\delta\mathbb{Z}^2$ respectively.

A more general result

Theorem (D.-C., Kozlowski, Krachun, Manolescu, Oulamara '20)
Fix $1 \leq q \leq 4$. There exist $c, C > 0$ such that for every $\delta > 0$ and $\alpha \in (0, \pi)$,

$$\mathbf{d}\big(\mathbb{P}_{\delta\mathbb{Z}^2}, \mathbb{P}_{\rho_\alpha\delta\mathbb{Z}^2}\big) \leq C\delta^c,$$

where $\mathbb{P}_{\delta\mathbb{Z}^2}$ and $\mathbb{P}_{\rho_\alpha\delta\mathbb{Z}^2}$ are the critical FK percolation measures on $\delta\mathbb{Z}^2$ and $\rho_\alpha\delta\mathbb{Z}^2$ respectively.

- The assumption that $q \leq 4$ is not a technical assumption: for $q > 4$, the transition is discontinuous and the scaling limit is trivial and not rotationally invariant;

A more general result

Theorem (D.-C., Kozlowski, Krachun, Manolescu, Oulamara '20)
Fix $1 \leq q \leq 4$. There exist $c, C > 0$ such that for every $\delta > 0$ and $\alpha \in (0, \pi)$,

$$\mathbf{d}\big(\mathbb{P}_{\delta\mathbb{Z}^2}, \mathbb{P}_{\rho_\alpha\delta\mathbb{Z}^2}\big) \leq C\delta^c,$$

where $\mathbb{P}_{\delta\mathbb{Z}^2}$ and $\mathbb{P}_{\rho_\alpha\delta\mathbb{Z}^2}$ are the critical FK percolation measures on $\delta\mathbb{Z}^2$ and $\rho_\alpha\delta\mathbb{Z}^2$ respectively.

- The assumption that $q \leq 4$ is not a technical assumption: for $q > 4$, the transition is discontinuous and the scaling limit is trivial and not rotationally invariant;
- Implies rotation invariance of many models, including Ising, Potts, and six-vertex models.

Next steps

Question

Prove universality on isoradial graphs.

Question (☠)

Prove that Scale+Translation+Rotation Invariance $\Longrightarrow$ Conformal Invariance

Question (☠☠)

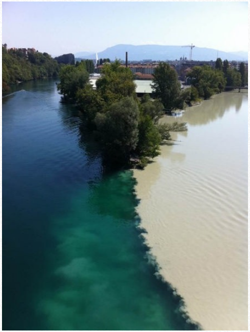
Prove the existence of a scaling limit, or prove that any possible sub-sequential limit must be Scale+Translation Invariant.

Together, these two problems would imply full conformal invariance.

Question (☠☠☠)

Extend the notion of universality outside the class of isoradial graphs.

Thank you



SwissMAP
The Mathematics of Physics
National Centre of Competence in Research

IHES